

Proyecto Fin de Carrera

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Análisis de placas ortótropas: soluciones analíticas & numéricas mediante el MEF

Autor: Alberto Hernández Huertas

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Dpto. Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Proyecto Fin de Carrera
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales.

Proyecto Fin de Carrera
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Análisis de placas ortótropas: soluciones analíticas & numéricas mediante el MEF

Autor:

Alberto Hernández Huertas

Tutor:

Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Profesor titular

Dpto. de Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2018

Proyecto Fin de Carrera: Análisis de placas ortótropas: soluciones analíticas & numéricas
mediante el MEF

Autor: Alberto Hernández Huertas

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque
Solano

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Agradecimientos

A Luis, por su tiempo, su dedicación y su apoyo en todo momento para que este trabajo saliera adelante.

A mis padres y mi hermano Luis, por creer que este día iba a llegar.

Índice

Agradecimientos	x
Índice	xi
Índice de Figuras	xiii
Índice de tablas	xvi
Notación	xviii
1. introducción	1
1.2. Organización del proyecto	1
2. Teoría de placas.....	3
2.1. Modelo de placa de Kirchhoff.....	3
2.1.1 Hipótesis fundamentales.....	3
2.1.2. Campo de desplazamientos.	4
2.1.3. Definición de esfuerzos	4
2.1.4. Ecuaciones de equilibrio de la placa.	5
2.1.6. Ecuaciones de Comportamiento.....	8
2.1.7. Ecuaciones de Comportamiento de placa ortótropa	9
2.1.7.1. Placa de material compuesto reforzado con fibras.	10
2.1.7.2. Placa con rigidizadores en una dirección.	11
2.1.7.3. Placa de con rigidizadores en dos direcciones.	12
2.1.7.4. Placa ondulada.	12
2.1.8. Formulación de Navier.	13
2.2. Solución de Navier para placas rectangulares isótropas.....	14
2.3. Solución de Navier para placas ortótropas rectangulares.	15
3. Método de los elementos finitos.....	17
3.1. Principio de los Trabajos Virtuales.....	17
3.2. Formulación de elementos finitos.	18
4. Análisis de casos resueltos	21
4.1. Introducción.....	21
4.2. Placa isótropa.....	21

4.3. Placa material compuesto	29
4.4. Placa con rigidizadores en una dirección.	38
4.4.1. Estudio de la densidad de rigidizadores en una dirección	48
4.5. Placa con rigidizadores en dos direcciones	51
4.5.1. Estudio de la densidad de rigidizadores en dos direcciones	62
4.6. Placa corrugada.	66
4.6.1. Estudio de la densidad de ondulaciones.	77
5. Conclusiones y trabajos futuros	80
5.1. Resumen y conclusiones	80
5.2. Trabajos futuros.	80
6. Referencias	81
7. Anexo I	82
7.1. Código de MATLAB para placa isótropa.	82
7.2. Código de MATLAB para placa de material compuesto.....	83
7.3. Código de MATLAB para placa con rigidizadores en una dirección.....	84
7.4. Código de MATLAB para placa con rigidizadores en dos direcciones.	85
7.5. Código de MATLAB para placa ondulada.	87
8. Anexo II	89
8.1. Código para la placa isótropa.....	89
8.2. Código para la placa de material compuesto.	91
8.3. Código para la placa con rigidizadores en una dirección.	92
8.4. Código para la placa con rigidizadores en dos direcciones	85
8.6. Código para la placa ondulada	93

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Modelo de placa cargada.....	3
Figura 2-2 Esfuerzos en la placa. Figura extraída de [6].....	5
Figura 2-3 Esfuerzos en un elemento diferencial de placa. Figura extraída de [5].....	6
Figura 2-4 Placa de material compuesto reforzado con fibras. Figura extraída de [3].....	11
Figura 2-5 Placa con rigidizadores en una dirección. Figura extraída de [4].....	11
Figura 2-6 Placa con rigidizadores en dos direcciones Figura extraída de [4].....	12
Figura 2-7 Placa ondulada. Figura obtenida de [3]	13
Figura 4-1 Geometría de placa isótropa.....	22
Figura 4-2 Modelo de elementos finitos de la placa isótropa.	22
Figura 4-3 Elemento SHELL. Figura extraída de [1]	23
Figura 4-4 Condiciones de contorno y de carga de la placa isótropa	24
Figura 4-5 Análisis de convergencia del modelo numérico de placa isótropa.....	25
Figura 4-6 Análisis de convergencia del modelo analítico de placa isótropa	25
Figura 4-7 Mapa de las flechas para la placa isótropa.....	27
Figura 4-8 Mapa de flechas obtenido en ANSYS para la placa isótropa	27
Figura 4-9 Geometría de la placa de material compuesto. Figura extraída de [2]	29
Figura 4-10 Orientación de las fibras. Figura extraída de [2]	30
Figura 4-11 Ejemplo de laminado. Figura extraída de [2].....	30
Figura 4-12 Laminado implementado en el modelo de elementos finitos. Figura extraída de [2]	32
Figura 4-13 Mallado final de la estructura de material compuesto	32
Figura 4-14 Condiciones de contorno para la placa de material compuesto.....	33
Figura 4-15 Código APDL para las matrices de rigidez.	34
Figura 4-16 Modelo de elementos finitos de la placa de material compuesto	34
Figura 4-17 Convergencia del modelo numérico de material compuesto.....	35
Figura 4-18 Estudio de convergencia de la solución analítica de la placa de material compuesto	36
Figura 4-19 Conjunto de líneas conforman la placa con rigidizadores en una dirección.....	39
Figura 4-20 Áreas que definen el Modelo de Elementos Finitos en el modelo de placa con rigidizadores en una dirección.....	40
Figura 4-21 Detalle de las normales de las áreas en el modelo de placa con rigidizadores en una dirección.	40

Figura 4-22 . Elemento BEAM 188. Extraído de [1].....	41
Figura 4-23 Sección de los rigidizadores.....	41
Figura 4-24 Líneas y Keypoint de referencia en la placa con rigidizadores en una dirección.	42
Figura 4-25 Modelo de Elementos Finitos para la placa con rigidizadores en una dirección.....	43
Figura 4-26 Modelo de Elementos Finitos del Rigidizador.....	43
Figura 4-27 Condiciones de contorno placa con rigidizadores en una dirección.	44
Figura 4-28 Deformación del modelo de placa con rigidizador en una dirección.....	45
Figura 4-29 Estudio de convergencia de la placa con rigidizadores en una dirección.	45
Figura 4-30 Solución analítica del problema placa con rigidizadores en una dirección.	46
Figura 4-31 Solución correspondiente al modelo analítico de la placa con rigidizadores en una dirección.....	47
Figura 4-32 Solución correspondiente al modelo numérico para la placa con rigidizadores en una dirección.	47
Figura 4-33 Placa con dos rigidizadores en una dirección.....	49
Figura 4-34 Placa con 6 rigidizadores en una dirección.	49
Figura 4-35 Influencia del número de rigidizadores en una dirección.	50
Figura 4-36 Conjunto de líneas conforman la placa con rigidizadores en dos direcciones.....	53
Figura 4-37 Áreas que definen el Modelo de Elementos Finitos de la placa con rigidizadores en dos direcciones.....	54
Figura 4-38 Detalle de las normales de las áreas en el modelo de placa con rigidizadores en dos direcciones.....	54
Figura 4-39 Sección de los rigidizadores.....	55
Figura 4-40 Líneas y keypoint de referencia para la placa con rigidizadores en dos direcciones.	56
Figura 4-41 Modelo de Elementos Finitos para la placa con rigidizadores en dos direcciones.....	57
Figura 4-42 Modelo de Elementos Finitos del Rigidizador.....	57
Figura 4-43 Condiciones de contorno sobre el modelo de placa con rigidizadores en dos direcciones.....	58
Figura 4-44 Deformación del modelo de placa con rigidizador en dos direcciones.....	59
Figura 4-45 Estudio de convergencia del modelo de elementos finitos de placa con rigidizadores en dos direcciones.....	59
Figura 4-46 Solución numérica del problema de placa con rigidizadores en dos direcciones.....	60
Figura 4-47 Conjunto de soluciones para el modelo analítico de placa con rigidizadores en dos direcciones.....	61
Figura 4-48 Conjunto de soluciones para el modelo numérico de placa con rigidizadores en dos direcciones.....	61
Figura 4-49 Placa con dos rigidizadores en dos direcciones.	63
Figura 4-50 Placa con seis rigidizadores en dos dirección.....	63
Figura 4-51 Influencia de los rigidizadores en dos direcciones en placa de 2.5x2.5m.....	64
Figura 4-52 Influencia de los rigidizadores en dos direcciones en placa de 5x5m.....	65
Figura 4-53 Nube de puntos para la construcción de la onda.....	67

Figura 4-54 Nube de puntos para la construcción de la onda completa.....	68
Figura 4-55 Conjunto de líneas que forman la onda completa.....	68
Figura 4-56 Áreas de la onda completa.....	69
Figura 4-57 Placa ondulada con $n=10$	70
Figura 4-58 Placa ondulada para $n=40$	70
Figura 4-59 Placa ondulada para $n=100$	71
Figura 4-60 Normales sobre la placa ondulada	71
Figura 4-61 Condiciones de contorno placa ondulada $n=100$	72
Figura 4-62 Deformación del modelo de placa ondulada.....	73
Figura 4-63 Resolución analítica de la placa ondulada para $n=100$	74
Figura 4-64 Soluciones del modelo analítico de la placa ondulada.....	75
Figura 4-65 Soluciones del modelo numérico de la placa ondulada $n=10$	75
Figura 4-66 Soluciones del modelo numérico de la placa ondulada $n=40$	76
Figura 4-67 Soluciones del modelo numérico de la placa ondulada $n=100$	76
Figura 4-68 Análisis de la densidad de ondulaciones en una placa 5x5m.	78
Figura 4-69 Análisis de la densidad de ondulaciones en una placa de 10x10m	79

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4-1 Propiedades geométricas de la placa isótropa.....	22
Tabla 4-2 Propiedades del material isótropo	23
Tabla 4-3 Estudio de convergencia del modelo de placa isótropa.....	24
Tabla 4-4 Estudio de convergencia del modelo de placa isótropa.....	26
Tabla 4-5 Comparativa de los valores obtenidos con el modelo analítico isótropo y ortótropo.	28
Tabla 4-6 Geometría del elemento placa de material compuesto.....	29
Tabla 4-7 Propiedades del material compuesto	31
Tabla 4-8 Secuencia de laminado	31
Tabla 4-9 Resultado del modelo numérico del modelo de material compuesto	35
4-10 Estudio de convergencia de la malla del modelo de material compuesto usando las propiedades	35
Tabla 4-11 Resumen de las soluciones obtenidas con los modelos planteados de material compuesto	36
Tabla 4-12 Errores cometidos en los modelos calculados respecto a la referencia en el modelo de material compuesto.	36
Tabla 4-13 Geometría del elemento placa con rigidizadores en una dirección.	38
Tabla 4-14 Geometría de los rigidizadores.....	38
Tabla 4-15 Propiedades del material isótropo.	39
Tabla 4-16 Convergencia de la malla para el modelo de placa con rigidizadores en una dirección...44	
Tabla 4-17 Soluciones obtenidas en los modelos para la placa con un rigidizador.....	46
Tabla 4-18 Distancia entre rigidizadores	48
Tabla 4-19 Resultado modificando el número de rigidizadores en una dirección.....	50
Tabla 4-20 Geometría del elemento placa con rigidizadores en dos direcciones.	51
Tabla 4-21 Geometría de los rigidizadores.....	52
Tabla 4-22 Propiedades del material isótropo de los rigidizadores en dos direcciones.....	52
Tabla 4-23 Convergencia de la malla para la placa con rigidizadores en dos direcciones.....	58
Tabla 4-24 Soluciones obtenidas para la placa con rigidizadores en dos direcciones.....	60
Tabla 4-25 Distancia entre rigidizadores en dos direcciones.....	62
Tabla 4-26 Resultados de los modelos modificando el número de rigidizadores en dos direcciones ..64	
Tabla 4-27 Geometría de la placa ondulada	66
Tabla 4-28 Propiedades del material isótropo de la placa ondulada.	66

Tabla 4-29 Convergencia de la malla de la placa ondulada.....	72
Tabla 4-30 Soluciones obtenidas con el modelo de placa ondulada	74
Tabla 4-31 Resultados modelo modificado el número de ondulaciones.....	77

Notación

a, b	Dimensiones de la placa
h	Espesor de la placa.
H_1	Altura del rigidizador en dirección y
H_2	Altura del rigidizador en dirección x
b_1	Ancho del rigidizador en dirección y
b_2	Ancho del rigidizador en dirección x
t_1	Separación rigidizador dirección y
t_2	Separación rigidizador dirección x
s	Semilongitud de onda
H	Amplitud de onda
ν	Módulo de Poisson
ν_x, ν_y	Módulos de Poisson en direcciones x e y
E	Módulo de Young.
E_x, E_y	Módulos de Young en direcciones x e y
G	Módulo de cizalladura
γ_{xz}, γ_{yz}	Deformaciones tangenciales
u, v, w	Desplazamientos.
θ_x	Giro de la normal en el plano xz
θ_y	Giro de la normal en el plano yx
M_x, M_y, M_{xy}	Esfuerzos de flexión
N_x, N_y, N_{xy}	Esfuerzos principales
p_z	Carga aplicada.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	Deformaciones
$\boldsymbol{\varepsilon}_f$	Pseudovector de deformaciones
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Matriz de deformación genérica
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	Curvaturas
$\boldsymbol{\kappa}_f$	Vector de curvaturas
σ_x, σ_y	Tensiones normales
τ_{xy}	Tensión tangencial
D	Constante de rigidez a flexión para el caso isótropo
$D_x, D_y, D_{xy}, D_{yx}, D_s$	Constantes de rigidez a flexión para el caso ortótropo.
$\overline{\boldsymbol{D}}_f$	Matriz constitutiva a flexión.

n,m

Pasos de la serie numérica.

1. INTRODUCCIÓN

La motivación del estudio de placa ortótropas viene derivada del gran interés ingenieril y a sus diversas aplicaciones en el ámbito de la ingeniería tales como los paneles de los puentes, los paneles de las alas de los aviones, las placas onduladas...etc. En la mayoría de estas aplicaciones, este tipo de placas presenta un comportamiento ortótropo ya sea por el material empleado como grafito-epoxi o bien por su constitución o distribución geométrica como en el caso de placas con rigidizadores dispuestos en uno de sus dimensiones.

El presente proyecto persigue estudiar el comportamiento a flexión de placas ortótropas sometidas a cargas superficial. Para ello se desarrollarán diferentes subrutinas de MATLAB para resolver diferentes tipos de placas ortótropas como pueden ser placas con rigidizadores, placas de materiales compuestos, placas onduladas, etc. Asimismo, se modelizarán diferentes casos de placa ortótropa mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) usando el software comercial ANSYS. Todo ello permitirá comprobar el rango de validez de las soluciones analíticas y las soluciones numéricas obtenidas.

1.2. Organización del proyecto.

Este documento se ha dividido en una serie de capítulos de forma que cada uno cubra las distintas líneas sobre las que trata el proyecto. A continuación, se describe de forma breve el contenido de los capítulos.

- **Capítulo 2. Teoría de placas:** Se presenta una visión global del problema de placa y se desarrollará de manera detallada los fundamentos matemáticos de la Teoría de Placas. Se exponen las hipótesis fundamentales de la teoría de placa delgada y, usando la teoría de la elasticidad, se obtiene la ecuación de comportamiento a flexión para una placa ortótropa sometida a carga superficial uniforme. Se expone, a continuación, un método de resolución basado en los desarrollos en serie y se particulariza para el caso isótropo y el caso ortótropo.
- **Capítulo 3: Método de los Elementos Finitos:** Se comienza describiendo la formulación débil del problema mediante la descripción del Teorema de los Trabajos Virtuales. A continuación, se describe de manera resumida la formulación general de elementos finitos, la discretización del problema y sus diferentes variables y la obtención de las matrices de rigidez.
- **Capítulo 4: Análisis de casos resueltos:** En este capítulo se resuelven diferentes casos de placa ortótropa. Se comienza partiendo de un problema de la placa isótropa que servirá como base para dar el salto a las placas ortótropas. Se realizará, para cada ejemplo analizado, un modelo numérico y un modelo analítico y se compararán los resultados obtenidos.
- **Conclusiones y trabajos futuros:** Al final del documento se hará un resumen y se extraerán conclusiones a partir de los resultados obtenidos y se propondrán distintas líneas de trabajo para futuros estudios en el mismo tema.

- **ANEXOS:** Se describirán los ejemplos de validación de códigos desarrollados en MATLAB para la resolución del problema de flexión, así como los códigos de elementos finitos en ANSYS que se han usado a lo largo del proyecto,

2. TEORÍA DE PLACAS

La siguiente sección presenta un breve desarrollo basado en la teoría de la elasticidad que es útil para el desarrollo de la teoría de placas y la obtención de la ecuación de la deformada.

2.1. Modelo de placa de Kirchhoff.

Se considera una placa a un sólido tridimensional con una de sus dimensiones (canto) mucho menor que las otras dos, cuya superficie media es un plano y que se encuentra cargada en dirección perpendicular a dicho plano.

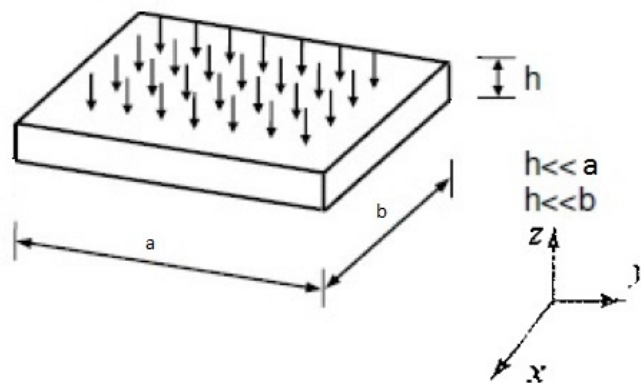


Figura 2-1 Modelo de placa cargada.

Considerando que el plano medio de la placa es coincidente con el plano xy y la coordenada z se encuentra perpendicular a este plano, se pueden asumir una serie de hipótesis generales del cálculo de estructuras lineal, las cuales se especifican a continuación:

- El material de la placa es elástico, homogéneo e isótropo.
- La deflexión del plano medio es pequeño comparado con el espesor de la placa.
- Hipótesis de pequeños desplazamientos.
- Superposición.

Estas hipótesis se conocen como las hipótesis de Kirchhoff, siendo análogas a las que se asumen en la teoría de vigas.

2.1.1 Hipótesis fundamentales

Las hipótesis cinemáticas que se asumen son:

1. La normal al plano medio en cualquier punto se traslada y gira. Matemáticamente, se puede expresar como

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (1.1)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (1.2)$$

2. Se cumple el principio de Saint-Venant.
3. Las tensiones normales al plano medio son nulas, lo cual implica que las cargas se están aplicando sobre la superficie media.

2.1.2. Campo de desplazamientos.

Con las hipótesis anteriores podemos deducir:

$$u(x, y, z) = u(x, y) - z\theta_x(x, y) \quad (1.3)$$

$$v(x, y, z) = v(x, y) - z\theta_y(x, y) \quad (1.4)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (1.5)$$

Donde w es la flecha correspondiente a los puntos del plano medio y θ_x y θ_y son los ángulos que se encargan de definir el giro de la normal contenida en los planos xz e yz respectivamente. Además, si la normal siendo recta, permanece normal a la superficie:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.7)$$

Se observa que las pendientes de la placa deformada son, también, las de la normal. Al igual que en el modelo de vigas, la deformación tangencial es nula.

Por consiguiente, el campo de desplazamientos de la placa se expresa de la forma:

$$u(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.8)$$

$$v(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.9)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (1.10)$$

2.1.3. Definición de esfuerzos

Los esfuerzos de la placa se representan en la Figura 2-2 y se definen matemáticamente como:

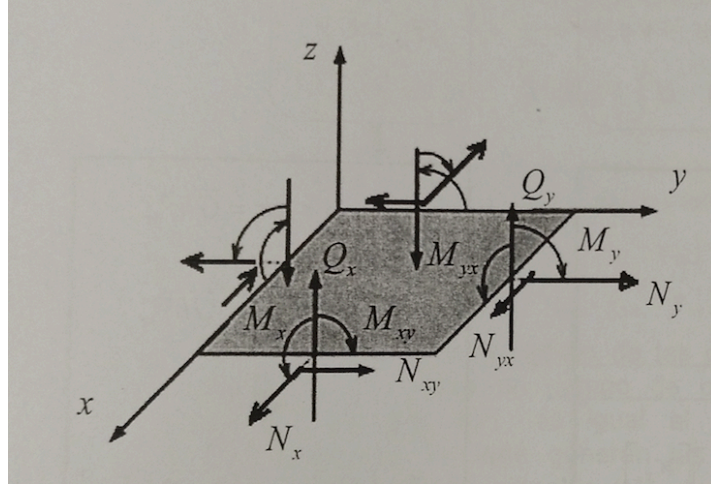


Figura 2-2 Esfuerzos en la placa. Figura extraída de [6].

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (1.11)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (1.12)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (1.13)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (1.14)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (1.15)$$

2.1.4. Ecuaciones de equilibrio de la placa.

Se planteará el equilibrio sobre un elemento diferencial en el que actúan cargas por unidad de superficie de valor p_z . En la Figura 2-3 se observan los esfuerzos sobre un elemento diferencial de placa.

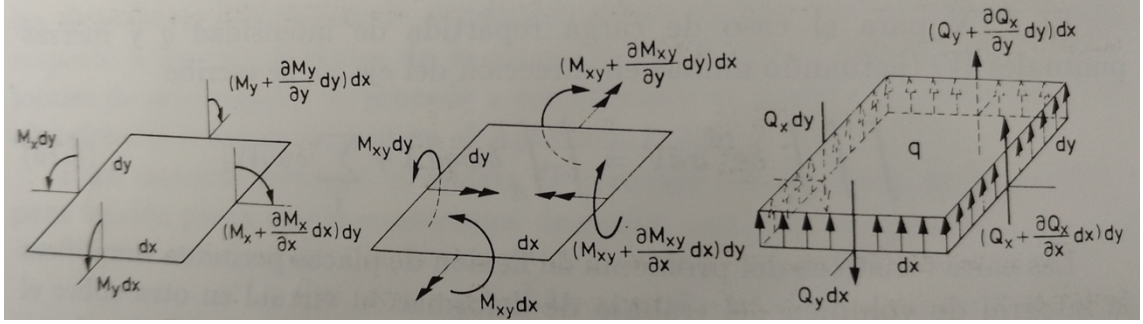


Figura 2-3 Esfuerzos en un elemento diferencial de placa. Figura extraída de [5].

- Equilibrio de fuerzas verticales:

$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + p_z dx dy = 0 \quad (1.16)$$

Dividiendo lo anterior por $dx dy$:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z = 0 \quad (1.17)$$

- Equilibrio de momentos

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0 \Rightarrow & \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \\ & - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + p_z dx dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_y = 0 \Rightarrow & \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \\ & - \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + p_z dx dy \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Donde sí se desprecian los términos de segundo orden queda:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (1.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.20) -(1.21) en la ecuación (1.17) se tiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p_z = 0 \quad (1.22)$$

2.1.5. Ecuaciones de Compatibilidad

Según las ecuaciones fundamentales de la elasticidad y según (1.3), (1.4) y (1.5), se deduce:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (1.23)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (1.24)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1.25)$$

Se deduce que las deformaciones transversales γ_{xz} y γ_{yz} como consecuencia de la hipótesis 1. Por tanto, las tensiones tangenciales transversales no contribuyen a la deformación. Esto no implica que las tensiones sean despreciables. Asimismo, se definen las curvaturas como:

$$\kappa_x = - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (1.26)$$

$$\kappa_y = - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (1.27)$$

$$\kappa_{xy} = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (1.28)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (1.6) y (1.7), se presentan las curvaturas en función de los desplazamientos:

$$\kappa_x = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.29)$$

$$\kappa_y = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.30)$$

$$\kappa_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.31)$$

Así, se establece la relación deformación-curvatura con lo desarrollado anteriormente. Con todo ello, la relación deformación-curvatura queda como sigue:

$$\varepsilon_x = z\kappa_x \quad (1.32)$$

$$\varepsilon_y = z\kappa_y \quad (1.33)$$

$$\gamma_{xy} = 2z\kappa_{xy} \quad (1.34)$$

Donde:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_f = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

De tal forma que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = z\boldsymbol{\kappa}_f \quad (1.37)$$

2.1.6. Ecuaciones de Comportamiento

La ley de comportamiento relaciona las componentes tensionales con las componentes de los desplazamientos. Dichas ecuaciones no son más que la representación generalizada de la Ley de Hooke, en el marco de la teoría elástica lineal. La relación entre las deformaciones y las tensiones implica, en el caso más general de elasticidad anisotrópica, una matriz constitutiva con 21 coeficientes independientes.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (1.38)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (1.39)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (1.40)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (1.32), (1.33) y (1.34), se pueden escribir los esfuerzos de flexión como:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E z^2}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu\kappa_y) dz = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_x + \nu\kappa_y) = D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E z^2}{1 - \nu^2} (\kappa_y + \nu \kappa_x) dz = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} (\kappa_y + \nu \kappa_x) = D (\kappa_y + \nu \kappa_x) \quad (1.42)
\end{aligned}$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = 2 \int_{-h/2}^{h/2} G z^2 \kappa_{xy} dz = 2G \frac{h^3}{12} \kappa_{xy} = (1 - \nu) D \kappa_{xy} \quad (1.43)$$

donde D es la constante de rigidez a flexión de la placa:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1.44)$$

Con todo, de forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{D}_f \mathbf{\kappa}_f \quad (1.46)$$

Sustituyendo las curvaturas correspondientes en las ecuaciones (1.41) -(1.43), se obtienen los esfuerzos de flexión en función de los desplazamientos:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.47)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.48)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.49)$$

2.1.7. Ecuaciones de Comportamiento de placa ortótropa

En el caso de la placa ortótropa, las ecuaciones de comportamiento de un material ortótropo son:

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_x^2} (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y) \quad (1.50)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1 - \nu_y^2} (\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x) \quad (1.51)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (1.52)$$

Donde:

$$G \approx \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1 + \sqrt{v_x v_y})} \quad (1.53)$$

Con todo, sustituyendo en las expresiones (1.11) -(1.13), se tiene:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_{xy} & 0 \\ D_{yx} & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

Donde:

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - v_x v_y)} \quad (1.55)$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - v_x v_y)} \quad (1.56)$$

$$D_{xy} = \frac{E_x v_y h^3}{12(1 - v_x v_y)} \quad (1.57)$$

$$D_{yx} = \frac{E_y v_x h^3}{12(1 - v_x v_y)} \quad (1.58)$$

$$D_s = G_{xy} = G \frac{h^3}{12} \quad (1.59)$$

Del mismo modo que en el apartado anterior, sustituyendo las expresiones de las curvaturas en los esfuerzos de flexión recogidos en la ecuación (1.54), se obtienen éstos en función de los desplazamientos:

$$M_x = -(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \quad (1.60)$$

$$M_y = -(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \quad (1.61)$$

$$M_{xy} = -D_s (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) \quad (1.62)$$

Donde D_x , D_y , D_{xy} y D_s son las constantes de rigidez a flexión de la placa ortótropa.

Se presentan, a continuación, las diferentes tipologías de placa estudiadas y sus rigideces equivalentes.

2.1.7.1. Placa de material compuesto reforzado con fibras.

En la Figura 2-4 se muestra la placa de material compuesto reforzado con fibras.

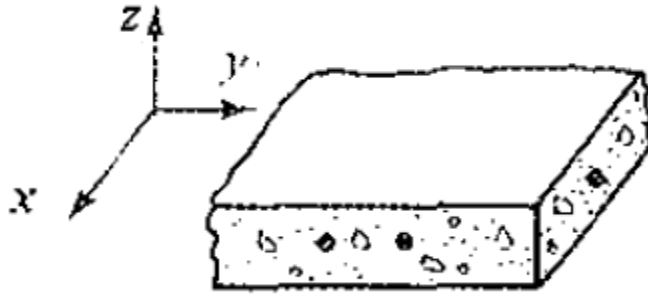


Figura 2-4 Placa de material compuesto reforzado con fibras. Figura extraída de [3]

Para el laminado se definirán una serie de matrices que describen la respuesta del laminado a momentos y fuerzas en el plano del mismo.

- A_{ij} son las rigideces en el plano que relacionan las fuerzas coplanarias (N_x, N_y, N_{xy}) con las deformaciones $\varepsilon_x^o, \varepsilon_y^o, \varepsilon_z^o$. Con ello, se define la matriz como:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_z^o \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

- D_{ij} son las rigideces a flexión que relacionan los momentos de flexión con las curvaturas:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

2.1.7.2. Placa con rigidizadores en una dirección.

Se muestra la Figura 2-5 para la placa con rigidizadores equidistantes en una dirección.

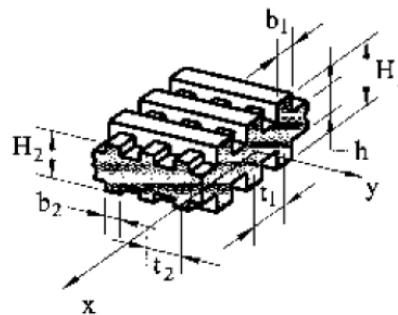


Figura 2-5 Placa con rigidizadores en una dirección. Figura extraída de [4]

Las rigideces a flexión para este caso son:

$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{E'b(H_1^3 - h^3)}{12t}; \quad D_y = H = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.65)$$

donde:

E, E' : Módulo elástico de la placa y los rigidizadores, respectivamente

ν : Módulo de Poisson de la placa.

t : Distancia entre los rigidizadores.

H_1 : Altura de los rigidizadores

h : Espesor de la placa.

2.1.7.3. Placa de con rigidizadores en dos direcciones.

En la Figura 2-6 se muestra la placa con rigidizadores en dos direcciones.

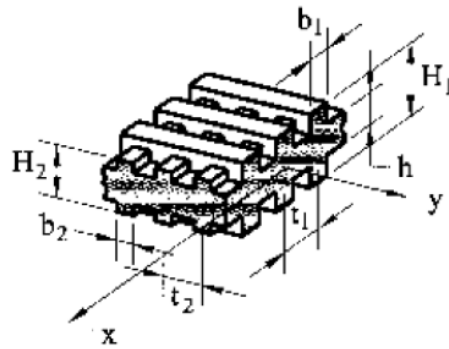


Figura 2-6 Placa con rigidizadores en dos direcciones Figura extraída de [4]

Donde las rigideces para este caso son:

$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'b_1(H_1^3 - h^3)}{12t_1}; D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'b_2(H_2^3 - h^3)}{12t_2} \quad (1.66)$$

$$H \cong \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.67)$$

E, E' : Módulo elástico de la placa y los rigidizadores, respectivamente

ν : Módulo de Poisson de la placa.

t_1 : Distancia entre los rigidizadores en dirección x.

t_2 : Distancia entre los rigidizadores en dirección y.

H_1, H_2 : Altura de los rigidizadores

2.1.7.4. Placa ondulada.

En la Figura 2-7 se muestra la placa ondulada.

D. Corrugated plate

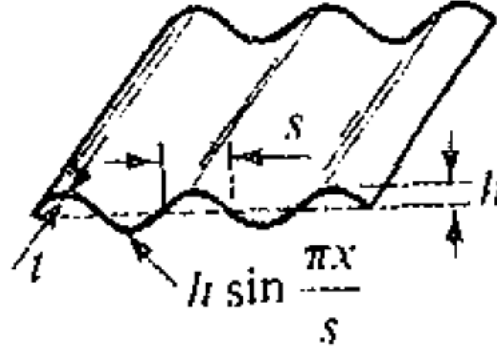


Figura 2-7 Placa ondulada. Figura obtenida de [3]

Las rigideces para esta tipología de placa son:

$$D_x = \frac{sEt^3}{\lambda(12 - \nu^2)} ; D_y = EI \quad (1.68)$$

$$H = \frac{\lambda Et^3}{a 12(1 + \nu)} \quad (1.69)$$

Donde:

$$\lambda = s \left(1 + \frac{\pi^2 h^2}{4s^2} \right) \quad (1.70)$$

$$I = 0.5th^2 \left(1 - \frac{0.81}{1 + 2.5(h/2s)^2} \right) \quad (1.71)$$

2.1.8. Formulación de Navier.

Con la obtención de la ecuación (1.22) y de los esfuerzos de flexión es posible establecer un sistema de ecuaciones que se puede expresar mediante la formulación de Navier. Introduciendo las ecuaciones (1.47) -(1.49) en la ecuación (1.22) se llega a:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D} \quad (1.72)$$

Esta ecuación gobierna el comportamiento a flexión de las placas delgadas. En función de las condiciones de contorno a las que esté sometida, se permitirá obtener los desplazamientos $w(x,y)$ y, a partir de ahí, cualquier esfuerzo o tensión asociado.

Para el caso de un material ortótropo, sustituyendo las expresiones de los esfuerzos de flexión (1.60) -(1.62) en la ecuación (1.22) se llega a:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_{xy} + 2D_s) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z \quad (1.72)$$

2.2. Solución de Navier para placas rectangulares isótropas.

Se considera una placa rectangular de lados a y b simplemente apoyada en todos sus lados y que soporta una carga $p(x, y)$. Las condiciones de contorno para una placa simplemente apoyada son:

$$w|_{y=0,b} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ en } y = 0, b \quad (1.73)$$

$$w|_{x=0,a} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ en } x = 0, a \quad (1.74)$$

Para abordar la ecuación de la deformada, tanto la flecha como la carga se pueden desarrollar mediante el uso de series dobles de Fourier.

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right) \quad (1.75)$$

$$p(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn} \sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right) \quad (1.76)$$

Donde los coeficientes w_{mn} y p_{mn} son coeficientes a determinar. Estas expresiones satisfacen automáticamente las condiciones de contorno impuestas anteriormente. Para la determinación de los coeficientes, cada parte de la ecuación se multiplica por $\sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right)$ y es integrada entre 0 - a y 0 - b . Con ello, por analogía se determina el coeficiente de la expresión de Fourier.

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right) dx dy \quad (1.77)$$

Para el caso de la flecha es necesario cumplir la ecuación de la deformada, ya que las condiciones de contorno ya están cumplidas. Se sustituye el desarrollo en serie de Fourier en la ecuación de la deformada y se igualan los términos:

$$w_{mn} = \frac{1}{D\pi^4} \frac{p_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \quad (1.78)$$

Con ello, la flecha puede describirse como:

$$w(x, y) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right) \quad (1.79)$$

Es importante destacar que tanto $\sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \leq 1$ y $\sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right) \leq 1$ para cada valor de x y y , al igual que para cada valor de m y n . La infinita solución de la deformada converge rápidamente y con unos pocos términos es posible tomar una solución válida.

La ecuación de la flecha se particularizará en el presente trabajo para una carga $p(x,y)=p_0$ (constante) y distribuida en toda la superficie de la placa. Con ello, la ecuación de la deformada queda como:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right) dx dy \\ &= \frac{4p_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right) dx dy \end{aligned} \quad (1.80)$$

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{ab} [1 - \cos(m\pi)][1 - \cos(n\pi)] \quad (1.81)$$

Quedando la flecha como:

$$\text{flecha} = \frac{16p_0}{D\pi^6} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right)}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2 mn} \right] \quad (1.82)$$

2.3. Solución de Navier para placas ortótropas rectangulares.

El procedimiento para la determinación de la flecha en placas ortotrópicas es idéntica a la usada en las placas isótropas a través de las series de Navier. Del mismo modo, aplicando el desarrollo en serie de Navier presentado en la sección anterior, junto con las condiciones de simplemente apoyado, igualmente expuestas anteriormente, se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ w_{mn} \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} D_x + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^2}{a^2 b^2} H + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} D_y \right) - p_{mn} \right\} \sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right) = 0 \quad (1.84)$$

Donde $H = D_{xy} + 2D_s$.

De forma análoga al caso de la placa isótropa, se obtiene:

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{D_x \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} \right) + 2H \left(\frac{m^2 n^2 \pi^2}{a^2 b^2} \right) + \left(\frac{n^4 \pi^4}{b^4} \right) D_y} \quad (1.85)$$

Para el caso particular de una placa rectangular sometida a una carga distribuida constante de valor p_0 , la flecha se reduce a lo siguiente:

$$w = \frac{16p_0}{\pi^6} \left[\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right)}{(D_x \left(\frac{m^4}{a^4}\right) + 2H \left(\frac{m^2 n^2}{a^2 b^2}\right) + \left(\frac{n^4}{b^4}\right) D_y) mn} \right] \quad (1.86)$$

Notar que esta expresión es coincidente con la obtenida para materiales isotropos cuando $D_x=D_y=D_{xy}=D$.

3. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

3.1. Principio de los Trabajos Virtuales.

Para determinar las ecuaciones que gobiernan el Método de los Elementos Finitos y sus singularidades es preciso basarse en el Principio de los Trabajos Virtuales. El PTV para un caso de carga distribuida p_z se desarrolla como sigue:

$$\iiint \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega = \iiint \delta w p_z d\Omega \quad (2.1)$$

El problema a flexión en placas presenta unas características que permite simplificar la integral de volumen y colocarla en función de los esfuerzos y deformaciones generalizadas. Con ello, se obtiene:

$$\delta U = \iiint \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega = \iiint (z \delta \hat{\varepsilon}_f^T) \sigma d\Omega = \iint \delta \hat{\varepsilon}_f^T \left[\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma dz \right] dA = \iint \delta \hat{\varepsilon}_f^T \hat{\sigma}_f dA \quad (2.2)$$

Por tanto, si se realizan operaciones con los esfuerzos y las deformaciones generalizadas el problema se transforma en un problema bidimensional donde todas las variables e integrales del problema quedan en función del plano medio de la placa.

$$\iiint (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) dV = \iiint w p_z d\Omega \quad (2.3)$$

donde los términos de las integrales son:

$$\begin{aligned} \iiint \delta \varepsilon_x \sigma_x d\Omega &= \iint \int_{-h/2}^{h/2} \delta \varepsilon_x \sigma_x dz dA \\ &= \iint \int_{-h/2}^{h/2} \delta \kappa_x \frac{E z^2}{1 - \nu^2} (\kappa_x + \nu \kappa_y) dz dA \\ &= \iint \delta \kappa_x D (\kappa_x + \nu \kappa_y) dA = \iint \delta \kappa_x M_x dA \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
\iiint \delta \gamma_{xy} \tau_{xy} d\Omega &= \iint \int_{-h/2}^{h/2} \delta \gamma_{xy} \tau_{xy} dz dA \\
&= \iint \int_{-h/2}^{h/2} \delta \kappa_{xy} 4G z^2 \kappa_{xy} dz dA \\
&= \iint \delta \kappa_{xy} 4G \frac{h^3}{12} \kappa_{xy} dA = \iint 2\delta \kappa_{xy} M_{xy} dA
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\iiint \delta \gamma_{xy} \tau_{xy} d\Omega &= \iint \int_{-h/2}^{h/2} \delta \gamma_{xy} \tau_{xy} dz dA \\
&= \iint \int_{-h/2}^{h/2} \delta \kappa_{xy} 4G z^2 \kappa_{xy} dz dA \\
&= \iint \delta \kappa_{xy} 4G \frac{h^3}{12} \kappa_{xy} dA = \iint 2\delta \kappa_{xy} M_{xy} dA
\end{aligned} \tag{2.6}$$

De forma que la expresión del PTV para la placa queda como:

$$\iint (\delta \kappa_x M_x + \delta \kappa_y M_y + 2\delta \kappa_{xy} M_{xy}) dA = \iint \delta w p_z dA \tag{2.7}$$

$$\iint \delta \mathbf{\kappa}_f^T \mathbf{M}_f dA = \iint \delta w p_z dA \tag{2.8}$$

El trabajo de deformación virtual es posible obtenerlo como suma de los trabajos que realizan los momentos sobre las curvaturas correspondientes. Asimismo, se observa que el problema posee derivadas segundas en la flecha, lo que obliga que tanto la flecha como su derivada primera sean continuas, lo que se conoce como continuidad clase C_1 .

3.2. Formulación de elementos finitos.

El Método de los Elementos Finitos permite discretizar de manera física el dominio a estudio siendo posible dividirlos en diferentes elementos. Estos elementos es posibles estudiarlos de una forma genérica.

Teniendo en cuenta el Método de los Elementos Finitos (MEF), la placa se discretiza en un número finito de elementos, normalmente triangulares o rectangulares, llamados *elementos finitos* y se conectan a través de nodos. El equilibrio y las condiciones de compatibilidad deben satisfacerse en cada nodo y en la frontera entre los diferentes elementos que conforman la discretización. Para satisfacer las condiciones de continuidad que se exigen en la flecha se tomará como variables nodales tanto la flecha como sus derivadas cartesianas.

Por tanto, por cada nodo se tendrá un total de 3 variables, $w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i$, siendo el número total de los elementos $3n$ con n el número de nodos. Dicho número representa la cantidad de elementos del polinomio que aproxima a w en cada elemento. Así,

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \dots \quad (2.9)$$

hasta el total de 3n términos.

Para el cálculo de los coeficientes α_i se exigen las condiciones en los nodos de tal forma que:

$$w_i = (w)_i \quad (2.10)$$

$$\theta_{x_i} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad (2.11)$$

$$\theta_{y_i} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \quad (2.12)$$

para $i=1 \dots n$.

La elección de los términos del polinomio de la ecuación (2.9) es el problema fundamental debido a las diferentes alternativas que existen. Para ello, se suelen elegir elementos rectangulares o triangulares como solución más común.

Como se ha visto, los desplazamientos de los nodos están relacionados con los desplazamientos de los elementos a través de funciones de desplazamiento. De tal forma, la ecuación (2.9) puede escribirse de forma genérica como:

$$w = \sum [N_i w_i + \bar{N}_i \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + \bar{\bar{N}}_i \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i] = N a^{(e)} \quad (2.13)$$

donde:

$$N_i = [N_i, \bar{N}_i, \bar{\bar{N}}_i] \quad (2.14)$$

$$a^{(e)} = [w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i]^T \quad (2.15)$$

representan la matriz de funciones de forma y el vector de movimientos del elemento j de un nodo i , respectivamente. Tras la definición de la flecha, la matriz de deformación genérica se define como:

$$\hat{\epsilon} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T = \sum B_i a_i^{(e)} = B a^{(e)} \quad (2.16)$$

con

$$B_i = [B]_i = \left[-\frac{\partial^2 [N]_i}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 [N]_i}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 [N]_i}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (2.17)$$

Con ello, de (2.9) y de (2.16) se deduce:

$$\delta w = \mathbf{N} \delta \mathbf{a}^{(e)}; \quad \delta \hat{\epsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.18)$$

Con estas relaciones previo paso a la sustitución en el PTV, se obtiene la ecuación matricial del elemento:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} \quad (2.19)$$

donde la matriz de rigidez elemental se define como:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \iint \mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{D}}_f \mathbf{B}_j dx dy \quad (2.20)$$

y el vector de fuerzas nodales equivalentes correspondientes a la carga repartida:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{pmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \end{pmatrix}^{(e)} = \iint \mathbf{N}_i^T p_z dx dy = \iint p_z \begin{pmatrix} N_i \\ \bar{N}_i \\ \bar{\bar{N}}_i \end{pmatrix} dx dy \quad (2.21)$$

donde M_{xi} y M_{yi} son los dos momentos flectores encargados de equilibrar el nodo i.

4. ANÁLISIS DE CASOS RESUELTOS

4.1. Introducción

El siguiente capítulo presenta el cálculo de diferentes estructuras tipo placas ortótropas sometidas a flexión según una carga distribuida en toda su superficie usando, para ello, el software comercial de elementos finitos ANSYS Inc.

Además, se compararán con los valores numéricos obtenidos mediante el software comercial MATLAB mediante el uso de diferentes rigidices equivalentes obtenidas de la literatura. Con ello, se compararán los resultados entre los diferentes valores de forma que el error cometido entre ellos sea el menor posible. Se estudiará, en primer lugar, el ejemplo de la placa isótropa como caso de validación.

Asimismo, en este capítulo se estudiarán como afecta la densidad de los rigidizadores en el error cometido y si puede establecerse un óptimo de rigidizadores para una placa de dimensiones dadas. Para ello, se realizarán ensayos variando el número de rigidizadores y se comparará con los resultados obtenidos de la literatura. En el caso de la placa ondulada, el estudio será similar, pero variando el número de corrugas que posee la placa. Finalmente, también se analizarán las deformadas de todas las placas.

4.2. Placa isótropa.

En este apartado se propone establecer un modelo o caso de validación de placa isótropa que sirva como base a los posteriores. Para ello, se usará un modelo del Método de los Elementos Finitos para la resolución de la placa. Se definirán tanto las propiedades geométricas, mecánicas, así como las condiciones de contorno en desplazamiento de los bordes y el método de resolución de la misma.

Para la validación de este modelo, se comparará con ejemplos resueltos obtenidos de la literatura y con la resolución exacta de las ecuaciones obtenidas en el apartado anterior. Con ello, se puede estudiar con es la exactitud de los resultados obtenidos numéricamente y cómo de buena es la aproximación del modelo.

La geometría de la placa a estudio será la de un panel constituido de material isótropo de dimensiones 0.5x0.5 m y de espesor 0.01m. En la bibliografía, se realiza el estudio para diferentes configuraciones de carga, sin embargo, sólo se tendrá en cuenta el caso de carga distribuida por toda la superficie con los bordes simplemente apoyados en todo su perímetro. Asimismo, este tipo de carga, junto con las condiciones de contorno mencionadas, serán las que se lleven a cabo en el resto de casos a estudio.

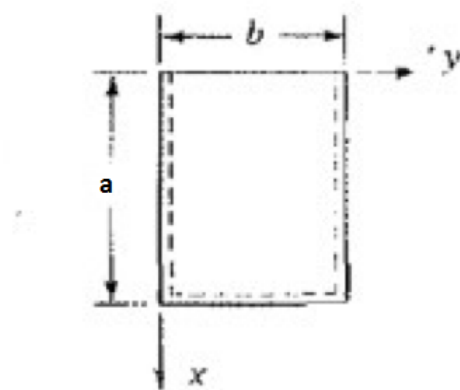


Figura 4-1 Geometría de placa isotrópica.

En la figura se pueden ver las dimensiones de la placa a estudio. Los datos se recogen en la Tabla 4-1

Tabla 4-1 Propiedades geométricas de la placa isotrópica

Dimensión	Valor (m)
<i>Longitud de x (a)</i>	0.5
<i>Longitud en y (b)</i>	0.5
<i>Espesor (h)</i>	0.01

En la Figura 4-2. se ejemplifica el modelo de elementos finitos correspondiente a la geometría del mismo que se ha obtenido para el caso de la placa isotrópica. En este modelo, sólo se representan las propiedades geométricas. Posteriormente, será necesario aplicarle las propiedades del material, un determinado mallado, las condiciones de contorno y la carga distribuida.

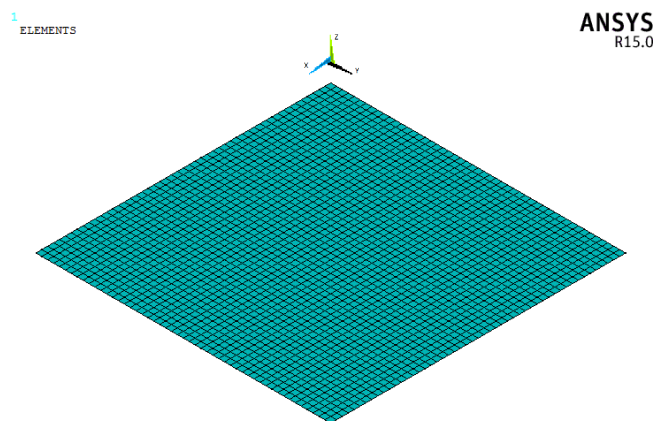


Figura 4-2 Modelo de elementos finitos de la placa isotrópica.

Las propiedades del material is otro de la placa objeto de estudio se presentan en la Tabla 2.

Tabla 4-2 Propiedades del material is otro

Propiedades	Valor
E (MPa)	210.000
ν	0.3

A la hora de efectuar el mallado de los elementos, el elemento elegido es el SHELL 181, que uno de los elementos óptimos para el estudio de placas delgadas y láminas en ANSYS. Es un elemento de 4 nodos con 6 grados de libertad en cada nodo: Las tres rotaciones respecto a los tres ejes y sus tres traslaciones respecto de dichos ejes. Es uno de los mejores elementos para el análisis lineal y no lineal en estructuras laminadas, siendo capaz de estudiar esfuerzos de flexión y de membranas en láminas.

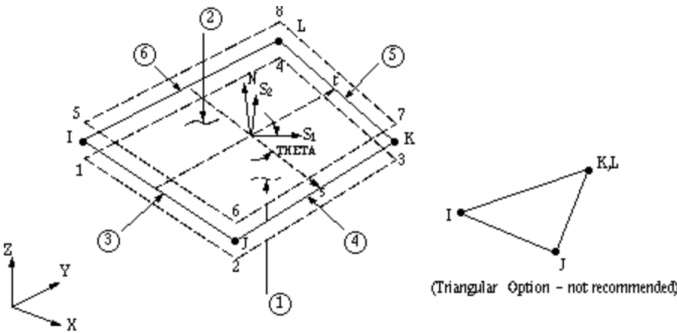


Figura 4-3 Elemento SHELL. Figura extraída de [1]

Tras la elección del elemento, se procede al mallado de la estructura. En la sección de ANSYS, se establece en el modelo creado una determinada sección que contiene las propiedades antes expuestas.

En cuanto al mallado de la estructura, en el presente trabajo se va a realizar un estudio del refinamiento del tamaño de la malla para ver como varía la flecha que se produce en el punto central de la placa. Se comenzará estudiando un tamaño de malla basto, lo que supondr  una solución muy pobre, y se irá aumentando hasta conseguir que el valor de la flecha no presente variaciones significativas.

En lo referente a las condiciones de contorno, éstas se aplicarán en los bordes de la placa. Todo el perímetro de la placa se encuentra simplemente apoyado. El tipo de condición de contorno que se da restringe algunos grados de libertad según el sistema global de referencia.

Para finalizar el modelo de elementos finitos, sólo es necesario aplicar una carga distribuida de 1000 kN distribuida por toda la superficie de la placa. En la Figura 4-4., se detalla el modelo con las condiciones de contorno y en carga aplicadas.

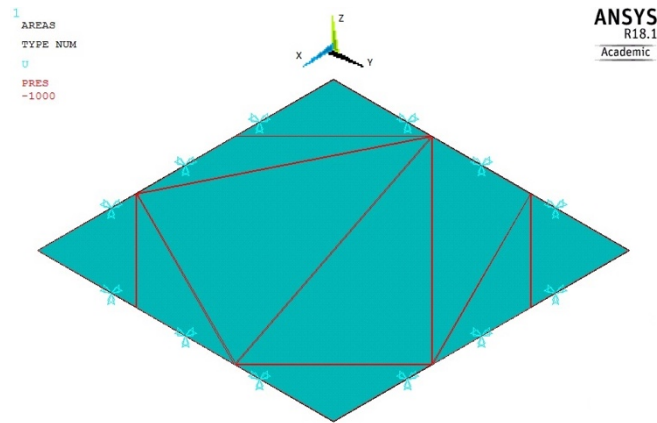


Figura 4-4 Condiciones de contorno y de carga de la placa isótropa

Con todo lo descrito anteriormente, y con su aplicación al modelo desarrollado, se obtendrán un valor de la deformación máxima, el cual se producirá en el punto central de la placa cargada. Los resultados obtenidos con el software comercial ANSYS y tras el estudio de refinamiento de malla se exponen en la Tabla 4-3:

Tabla 4-3 Estudio de convergencia del modelo de placa isótropa

Tamaño del elemento	Flecha en el punto central (m)
0.1	0.121e-4
0.05	0.133e-4
0.02	0.133e-4
0.01	0.134e-4

La deformación máxima se produce en el punto central de la placa, lo cual es coherente con la teoría de placas y láminas sometidas a flexión. Gráficamente, el estudio de convergencia se muestra en la Figura 4-5.

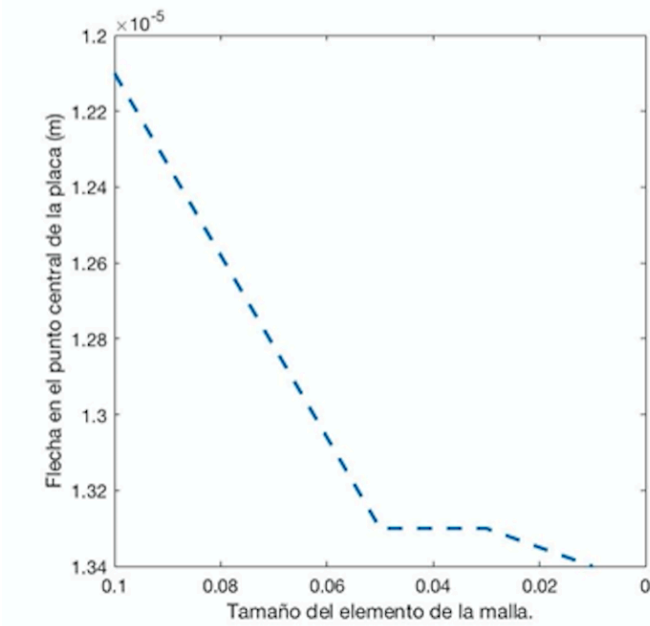


Figura 4-5 Análisis de convergencia del modelo numérico de placa isotrópica

Se puede observar que el modelo converge a medida que la malla se va refinando. Para poder realizar la comparativa de los resultados obtenidos, se implementará un código usando el software MATLAB que resuelva la ecuación (1.82) según la geometría, propiedades del material, condiciones de contorno y en carga descritas anteriormente. Para la resolución de la ecuación, se implementará un doble bucle for que va iterando para diferentes valores m y n hasta alcanzar un valor donde la flecha no varíe de forma significativa. Como se vio en el apartado 2 de este trabajo, el modelo converge rápidamente.

En el ANEXO se desarrolla el modelo completo implementado en MATLAB para la resolución del caso de placa isotrópica. Los resultados obtenidos tras la implementación en MATLAB se presentan, a continuación:

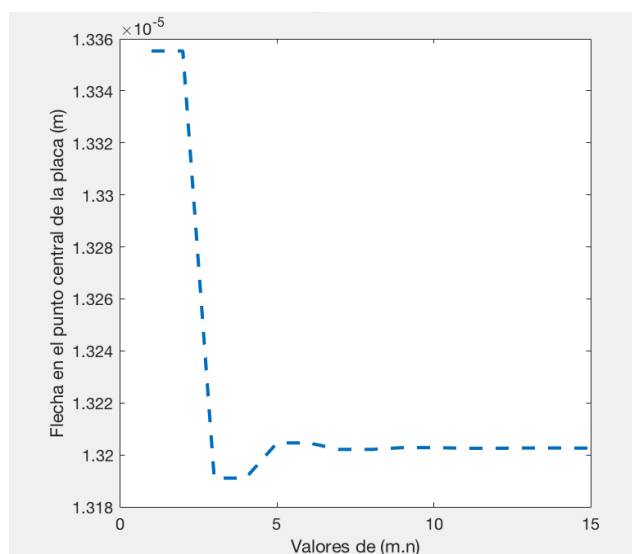


Figura 4-6 Análisis de convergencia del modelo analítico de placa isotrópica

Como se ha comentado anteriormente, el modelo converge rápidamente y a partir de la quinta iteración, la solución no varía significativamente. En la Tabla 4-4 se expone una comparativa entre los valores obtenidos en este proyecto por ambos métodos. Tras la obtención de estos resultados, es necesario el cálculo de las diferencias entre ambos valores para comprobar la validación del modelo. La ecuación para el cálculo del error cometido se expone como sigue:

$$\text{Error cometido [\%]} = \frac{\text{Valor ANSYS} - \text{Valor MATLAB}}{\text{Valor ANSYS}} \times 100 \quad (3.1)$$

Tabla 4-4 Estudio de convergencia del modelo de placa isótropa

	Modelo analítico	Modelo MEF	Error cometido (%)
Flecha en el punto central de la placa (m)	0.132e-4	0.134e-4	1.49

Como se puede ver, los errores cometidos son muy pequeños, no llegando ni siquiera al 2%, con lo que podemos asegurar que los resultados obtenidos son válidos y el modelo numérico creado con ANSYS aporta buenos resultados.

La diferencia obtenida entre ambos modelos puede deberse a la utilización del programa de elementos finitos usada, quizás algo antiguo para los modelos que se utilizan actualmente. Asimismo, puede haberse cometido un pequeño error de redondeo a la hora de calcular la solución en MATLAB.

Otra vía para validar el modelo de elementos finitos creado podemos encontrarlo en la comparativa de ambas deformaciones. Se ha obtenido la solución a través del modelo de elementos finitos en desplazamientos de la placa. Asimismo, a través de la utilización de MATLAB, se ha resuelto la ecuación (1.82) para toda la dimensión de la placa y sus soluciones se han representado gráficamente. En las Figuras 4-7 y 4-8 se puede observar los desplazamientos obtenidos usando el modelo numérico y el modelo analítico:

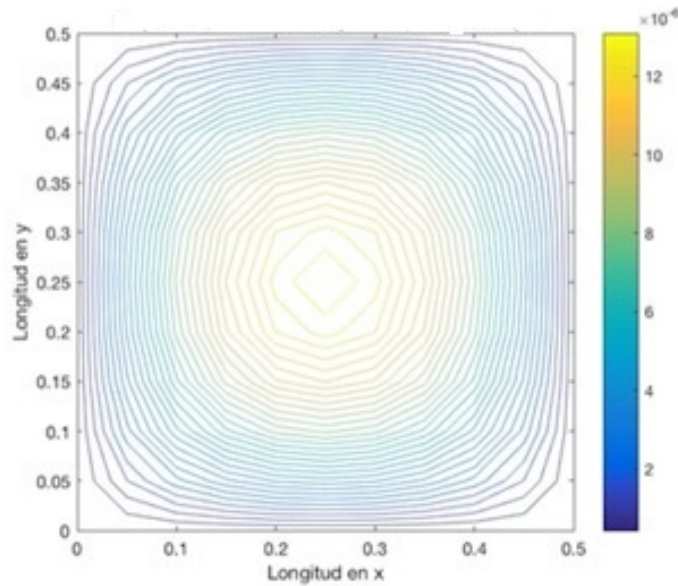


Figura 4-7 Mapa de las flechas para la placa isótropa.

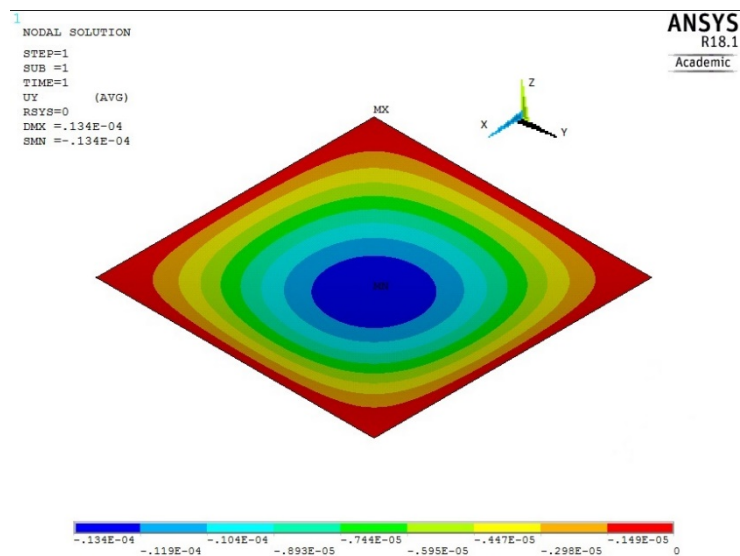


Figura 4-8 Mapa de flechas obtenido en ANSYS para la placa isótropa

Como podemos observar, ambas deformaciones máximas se producen en el punto central de la placa, siendo el patrón de las soluciones el mismo para cada punto de la estructura. En los bordes cabe destacar que se cumplen las condiciones de contorno impuestas, tanto en el modelo analítico como en el modelo numérico, siendo los desplazamientos nulos en todo el perímetro de la placa.

Por último, para terminar de validar el resultado obtenido a través del modelo analítico se va a resolver el mismo problema, pero usando la solución implementada para el caso ortótropo. Esta solución, si está referida al caso isótropo, debe presentar la misma solución que éste. Para ello, se introducen las propiedades de la placa, propiedades del material, condiciones de contorno y carga en el código implementado en el caso ortótropo. Como se puede apreciar, ambos modelos aportan el mismo resultado para la deformación máxima de la placa como se deducía de la teoría incluida en el capítulo 2 de este mismo trabajo. Con ello, podemos reafirmar que el modelo de elementos

finitos creado aporta buenos resultados y la concordancia entre los datos del modelo analítico y el modelo numérico es satisfactoria.

En la Tabla 4- 5 se recogen los valores estudiados:

Tabla 4-5 Comparativa de los valores obtenidos con el modelo analítico isótropo y ortótropo.

	Modelo isótropo (m)	Modelo ortótropo (m)	Error cometido (%)
Flecha en el punto central de la placa (m)	0.132e-4	0.132e-4	0.0198

4.3. Placa material compuesto.

En este apartado se considerará una placa de material compuesto sometida a flexión sobre la que se estudiará su deformación a través de un modelo de Elementos Finitos y a través de la resolución numérica de las ecuaciones del modelo ortótropo obtenido en el capítulo 2.

La geometría a estudio será la de una placa rectangular fabricada por láminas de material compuesto fabricadas con Grafito-Epoxy, sometido a una carga perpendicular en toda su superficie y con unas dimensiones de 0.2x0.2m. El espesor de cada lámina, el cual es fijo para todas ellas, es de 0.01m En la Tabla 4-6, se recogen los datos geométricos de la placa y una esquematización del problema a estudio en la Figura 4-9.

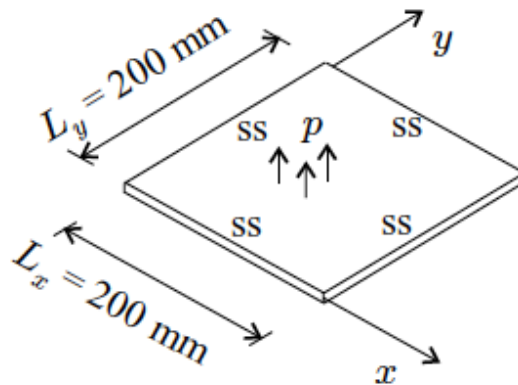


Figura 4-9 Geometría de la placa de material compuesto. Figura extraída de [2]

Tabla 4-6 Geometría del elemento placa de material compuesto

Dimensión	Valor (m)
Longitud en x	0.2
Longitud en y	0.2
Espesor	0.002

Un apartado fundamental de la geometría del material compuesto es definir correctamente la secuencia de apilamiento de las diferentes láminas que componen el material compuesto. En este trabajo, se tomará como referencia el método que se recoge en [2].

Para definir el apilamiento se usa un sistema de coordenadas cartesiano donde la coordenada z se encuentra perpendicular al plano del laminado. La orientación de las fibras se especifica a través del ángulo θ definido a partir del eje x. Este ángulo es definido positivo en dirección contraria a las agujas del reloj. En la Figura 4-10, se esquematiza esta descripción:

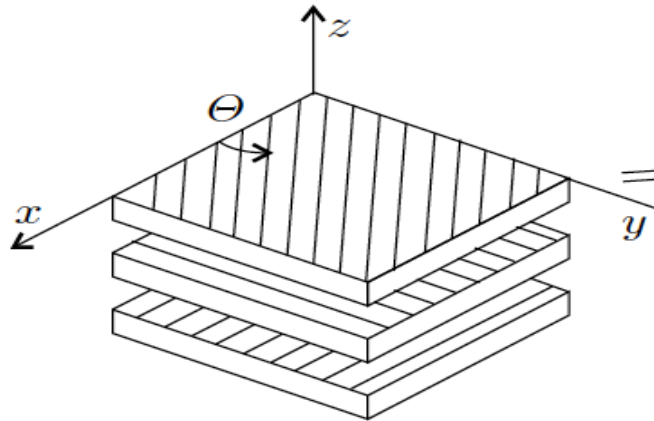


Figura 4-10 Orientación de las fibras. Figura extraída de [2]

Para especificar el número de láminas dentro de un mismo laminado se utilizan subíndices. Por ejemplo, el laminado que se muestra en la Figura 4-11 es descrito como $[45_3/0_4/90_2/60]$. En este laminado, podemos encontrar 4 grupos diferentes de apilamiento. Las tres primeras capas se encuentran orientadas a 45° según el eje x, después, el segundo grupo contiene 4 capas a 0° , el tercero dos capas a 90° y el último una única capa a 60° , todas ellas definidas positivas en dirección contraria a las agujas del reloj y respecto desde el eje x.

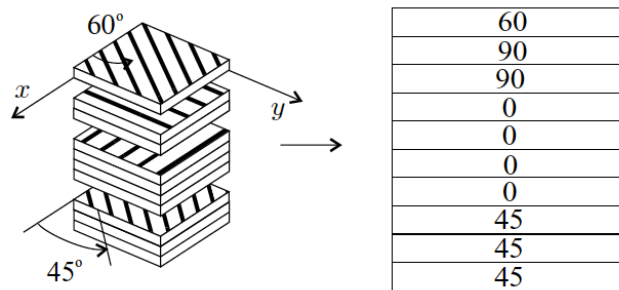


Figura 4-11 Ejemplo de laminado. Figura extraída de [2]

Además de la secuencia de apilamiento, es importante introducir el concepto de matrices de rigidez para poder avanzar en los desarrollos siguientes. Los laminados delgados se pueden caracterizar a través de matrices de rigidez que se denotan por $[A]$ y $[D]$. Estas matrices pueden obtenerse a través de un análisis usando la teoría de placas y láminas. Con esto, es suficiente para entender los diferentes desarrollos que se exponen. Al igual que en el modelo de la placa isótropa, se definirá un modelo mediante Elementos Finitos usando la geometría anteriormente descrita.

Se implementará el modelo a través del software ANSYS mediante la definición de los materiales a través de sus constantes elásticas y realizando la secuencia de apilamiento correspondiente. El elemento usado para modelar los laminados es el SHELL 181, que como se vio en el ejemplo anterior proporciona buenos resultados.

Se comenzará exponiendo el modelo realizado usando las constantes de los materiales y, seguidamente, el realizado a través de las matrices de rigidez. Las propiedades del material compuesto se detallan en la Tabla 4-7 y han sido obtenidas de [2]

Tabla 4-7 Propiedades del material compuesto

Propiedad	Valor
E_1 (GPa)	148
E_2 (GPa)	9.65
G_{12} (GPa)	4.55
ν_{12}	4

Una vez definido la geometría y los materiales, se define la sección de la lámina. En el apartado del pre-procesador de ANSYS es posible definir las diferentes secuencias de apilados, con su propia orientación, y el material del que se encuentra definido. Los laminados se numeran desde el más externo hacia el interior de los mismos. En este estudio, la secuencia de laminado utilizada ha sido:

Tabla 4-8 Secuencia de laminado

Número de capa	Orientación [deg]	Espesor de la capa
1	0	0.01
2	0	0.01
3	45	0.01
4	45	0.01
5	90	0.01
6	90	0.01
7	-45	0.01
8	-45	0.01

Usando la terminología introducida anteriormente, la secuencia de apilado se esquematiza como:
 $[0_2/45_2/90_2/-45_2]$

En la Figura 4-12, se observa la secuencia de apilamiento de las distintas capas introducidas en ANSYS:

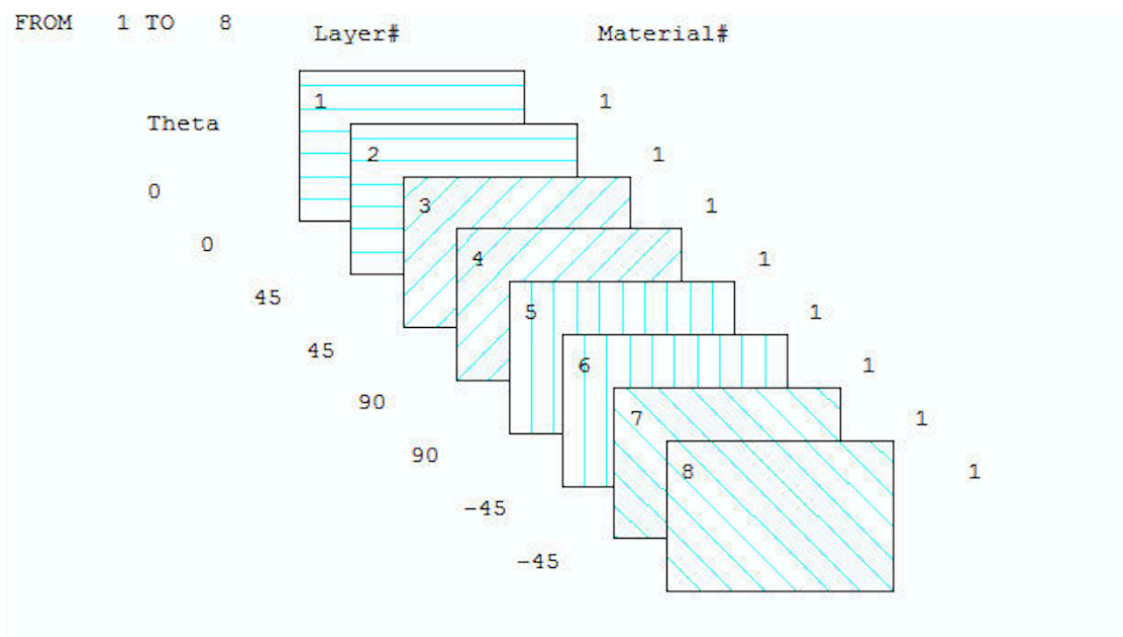


Figura 4-12 Laminado implementado en el modelo de elementos finitos. Figura extraída de [2]

Tras la definición de la sección, únicamente resta realizar el mallado de la estructura. Como en el ejemplo anterior, la longitud del panel se discretizará usando diferentes tamaños de malla para realizar un análisis de convergencia de la deformación de la placa incrementando el tamaño de la malla hasta la obtención de buenos resultados sin que el tiempo de resolución del problema se vea comprometido. El mallado final de la estructura puede verse en la Figura 4-13

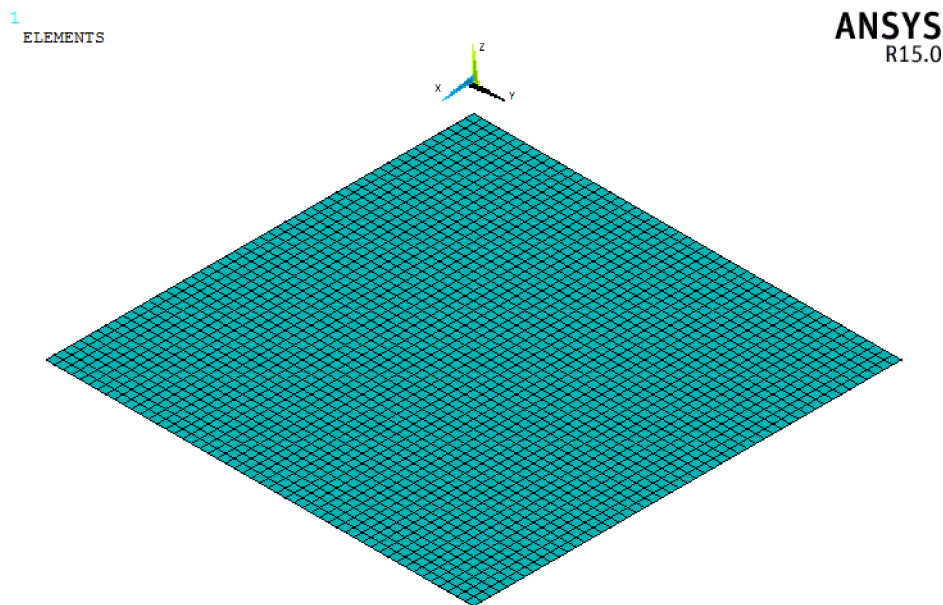


Figura 4-13 Mallado final de la estructura de material compuesto

Las condiciones de contorno serán de aplicación en todo el perímetro de la placa, considerándose los bordes simplemente apoyados en todo su perímetro, restringiendo ciertos grados de libertad en los lados de la placa. Para finalizar, se aplicará una carga constante de valor $P_0=50.000 \text{ kN/m}^2$ en toda su superficie. En la Figura 4-14, se observa el modelo de elementos finitos con las condiciones de contorno. Se ha representado únicamente las líneas para su mejor visualización.

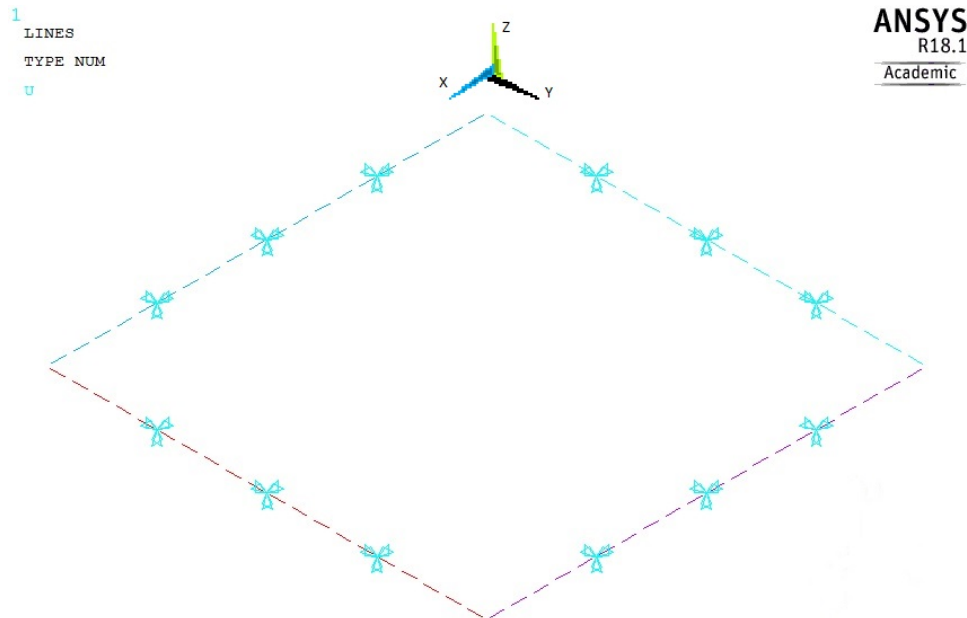


Figura 4-14 Condiciones de contorno para la placa de material compuesto

Para validar este modelo numérico y para tener otro valor para comparar con la referencia encontrada en la bibliografía, se realiza un segundo modelo numérico donde se van a introducir las matrices de rigidez referidas a la configuración del material compuesto objeto de estudio, sin la necesidad de incluir dato alguno sobre constantes elásticas o secuencias de apilamiento.

Como antes se expuso, las matrices de rigidez describen la respuesta del laminado ante una configuración concreta. Las matrices de rigidez como consecuencia de la secuencia de laminado objeto de estudio se detallan en las ecuaciones (1.62) y (1.63). Las matrices han sido obtenidas de [2] y se presentan a continuación:

$$[A] = \begin{bmatrix} 99.95 & 31.57 & 0 \\ 31.57 & 99.95 & 0 \\ 0 & 0 & 34.19 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} 34.61 & 4.58 & 3.34 \\ 4.58 & 12.34 & 3.34 \\ 3.34 & 3.34 & 5.19 \end{bmatrix}$$

El elemento a usar de cara a modelizar la lámina es, como en apartados anteriores, el SHELL 181, dado los buenos resultados obtenidos. Tras la definición del elemento, se presenta la geometría de la placa, siendo ésta de las mismas dimensiones que la placa anterior. Las matrices de rigidez se introducen en la parte del pre-procesador del software ANSYS en el apartado de la sección. Es importante notar que la sección tiene que ser de tipo genérica para poder introducir las matrices

de rigidez. El código APDL donde se introducen las matrices de rigidez se presenta, a continuación:

```

SECT,1, GENS,,
SSPA,99.95e6,31.57e6,0,99.95e6,0,34.19e6
SSPB,0,0,0,0,0,0
SSPD,34.61,4.56,3.34,12.34,3.34,5.14
SSPE,37812.8,0,37964.7
SSMT,,,
SSBT,,,
SSPM,

```

Figura 4-15 Código APDL para las matrices de rigidez.

Cabe destacar que para la implementación en ANSYS de las matrices de rigidez es necesario aportar una matriz adicional para que el software pueda resolver. Dicha matriz en la matriz E que ya se encuentra incluida en el código como se puede apreciar en la Figura 4-15. Dicha matriz representa la rigidez transversal a cortante para los elementos tipo SHELL. Esta matriz ha sido tomada de la bibliografía.

Tras esto, se realiza el mallado de la lámina usando diferentes tamaños de malla para realizar un análisis de convergencia de la deformación de la placa. El resultado de ambos análisis de convergencia se expondrá más adelante. Las condiciones de contorno son simplemente apoyadas en todos los bordes de la placa y ésta se encuentra sometida a una carga por unidad de superficie de 50.000 kN/m². El modelo de elementos finitos queda finalmente como se muestra en la Figura 4-16.

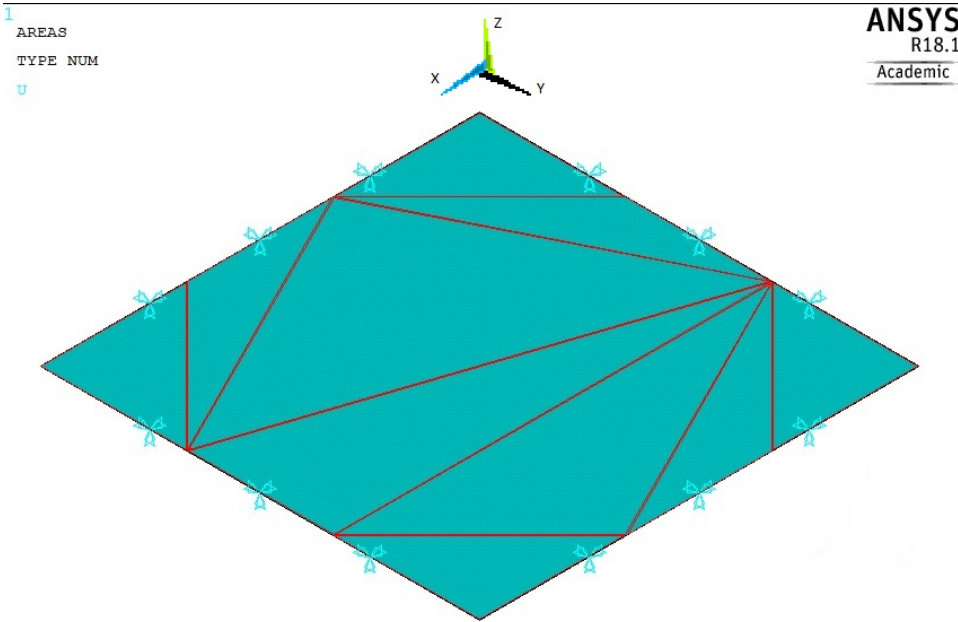


Figura 4-16 Modelo de elementos finitos de la placa de material compuesto

Con todo, se exponen en la siguiente tabla los valores obtenidos para los diferentes modelos de elementos finitos implementados:

Tabla 4-9 Resultado del modelo numérico del modelo de material compuesto

	Modelo con las propiedades	Modelo con las rigideces
Flecha en el punto central de la placa (m)	0.0166	0.0238

Los resultados tras el estudio de refinamiento de malla se exponen en la siguiente tabla:

4-10 Estudio de convergencia de la malla del modelo de material compuesto usando las propiedades

Tamaño del elemento	Valor
0.1	0.0166
0.05	0.0168
0.02	0.0166
0.01	0.0166

Gráficamente se representa como sigue:

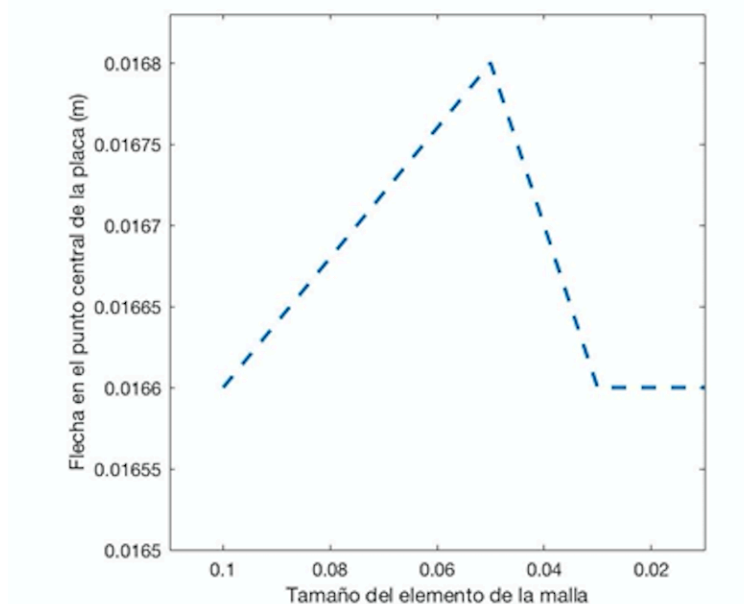


Figura 4-17 Convergencia del modelo numérico de material compuesto.

Como se puede observar, el modelo numérico converge muy rápidamente y apenas se aprecian diferencias en los resultados obtenidos cuando se va modificando el tamaño de la malla.

Asimismo, se resolverá la ecuación (1.86) planteada en el apartado 2 de este documento haciendo uso del programa MATLAB. Los valores de las rigideces equivalentes se toman del ejemplo 3.2 perteneciente a [2].

Se implementará un doble bucle FOR similar al realizado para la resolución de la placa isotrópica, el cual va recorriendo la serie para diferentes valores de m y n hasta alcanzar un valor donde la flecha de la placa no presente cambios significativos. Es importante notar que el modelo converge rápidamente y los tiempos de simulación son muy pequeños. En el ANEXO se adjunta el código completo para la resolución del problema. Los resultados obtenidos en MATLAB se observan en la siguiente Figura 4-18

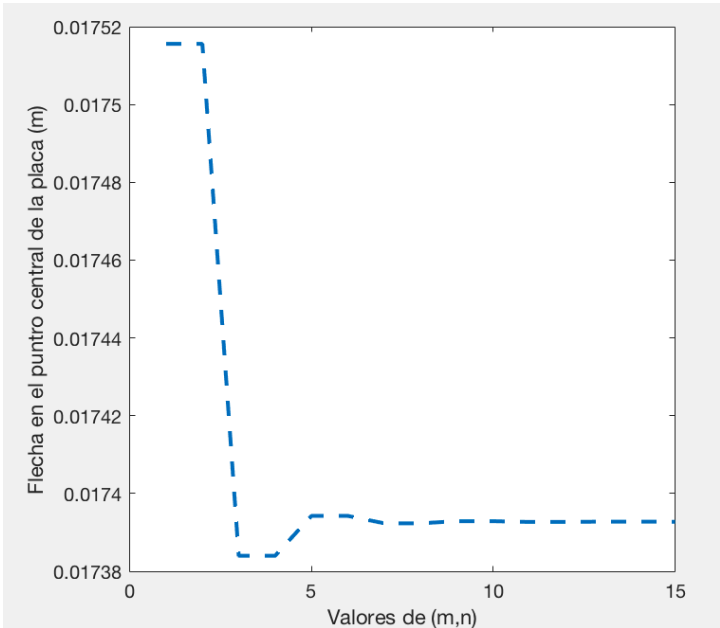


Figura 4-18 Estudio de convergencia de la solución analítica de la placa de material compuesto

Realizando todo lo descrito anteriormente, y tras su aplicación a este modelo, se obtendrá la flecha máxima de la estructura de este problema. En la Tabla 3-11, se presenta, a modo de resumen, la comparativa entre las diferentes flechas calculadas en este proyecto, y el valor obtenido de la referencia [2].

Tabla 4-11 Resumen de las soluciones obtenidas con los modelos planteados de material compuesto

	Modelo analítico	Modelo con las propiedades	Modelo con las rigideces	Referencia [2]
Flecha máxima (m)	0.0174	0.0166	0.0238	0.016

Tras la obtención de los valores, se procede al cálculo de los errores. Para ello, se establecerá como valor de referencia el obtenido en la literatura. En la Tabla 4-12, se recogen los errores cometidos respecto al valor tomado como referencia.

Tabla 4-12 Errores cometidos en los modelos calculados respecto a la referencia en el modelo de

material compuesto.

	Modelo analítico	Modelo con las propiedades.	Modelo con las rigideces.
Error (%)	8.05%	3.77%	32.77%

En la Tabla 4-12 podemos observar los diferentes errores cometidos en nuestro modelo respecto a la referencia tomada de la bibliografía. Tanto el modelo analítico como el modelo realizado con las propiedades presentan muy buenos resultados respecto al tomado al comparado con la referencia de la bibliografía. Sin embargo, el modelo con rigideces presenta resultados mucho más pobres con errores por encima del 30%.

Estos errores tan elevados son motivo de la elección de la matriz [E] incluida en el código de ANSYS para el modelo con rigideces. Su cálculo exacto es muy complicado y se ha tomado una matriz que es similar a las dimensiones y características aquí estudiadas, pero no idéntica, de ahí que se produzcan errores en el cálculo del modelo. Sin embargo, el dato que aporta presenta una primera aproximación que puede considerarse aceptable dada las aproximaciones que se han tomado para determinar las rigideces.

Por el contrario, tanto el modelo analítico como el modelo con las propiedades presenta buenos resultados respecto al valor de la referencia. Los errores cometidos en el modelo pueden deberse a las aproximaciones que se incluyen en el cálculo del modelo analítico con las rigideces equivalentes para transformar la placa de material compuesto en una placa ortótropa equivalente.

4.4. Placa con rigidizadores en una dirección.

En este apartado se estudiará un modelo basado en una placa plana rectangular con rigidizadores rectangulares en una de sus direcciones principales. Como en los apartados anteriores, se validará usando un modelo de Elementos Finitos construido con el software ANSYS. Todas las propiedades geométricas, mecánicas tanto de la placa como de los rigidizadores se definirán, así como las propiedades de los materiales y las condiciones de contorno en los bordes.

La validación del modelo se llevará a cabo mediante la comparación de los resultados obtenidos del mismo con los resultados obtenidos de un modelo analítico implementado en MATLAB usando el código de resolución de placa ortótropa ya empleado en el caso de la placa de material compuesto. En este modelo, las rigideces equivalentes se tomarán de la literatura. Con ello, se estudiará cual es la exactitud y la validez del modelo numérico en comparación con lo referido en la bibliografía.

La placa presenta unas dimensiones de 2.5x2.5m y un espesor constante para toda la placa de 0.01m. Las propiedades del material constituyente de la placa será acero. La placa contará con cuatro rigidizadores rectangulares que se disponen de forma equidistante a lo largo de una de sus direcciones principales. Los rigidizadores se fabrican del mismo material que la placa, siendo ambos materiales isótropos. En este estudio, se ha tomado como tamaño de los rigidizadores el más pequeño que existe en el mercado, siendo sus dimensiones de 80x120 cm. Las propiedades geométricas de la placa y de los rigidizadores se recogen en la Tabla 3-12 y Tabla 3-13.

Tabla 4-13 Geometría del elemento placa con rigidizadores en una dirección.

Dimensión	Valor (m)
Longitud en x	2.5
Longitud en y	2.5
Espesor (h)	0.01

Tabla 4-14 Geometría de los rigidizadores

Dimensión	Valor (m)
Altura (H_1)	1.20
Anchura (b_1)	0.80
Distancia entre rigidizadores	0.50

Las propiedades del material se recogen en la Tabla 4-15.

Tabla 4-15 Propiedades del material isotrópico.

Dimensión	Valor
E (MPa)	210.000
ν	0.3

La placa con los rigidizadores se encuentra simplemente apoyada en todos sus bordes y ésta se encuentra sometida a una carga en toda su superficie de valor 1000 kN/m². La modelización de la placa con los rigidizadores comienza definiendo la geometría global de la placa con las dimensiones anteriormente expuestas. Con el uso de líneas, se delimita un rectángulo de 2.5 por 2.5 m, que representará a la placa delgada. Posteriormente, se trazan otras líneas equidistantes que representarán, cuando el modelo esté mallado, a los rigidizadores que irán en una única dirección. Este conjunto de líneas trazadas en el software ANSYS hará las veces de esqueleto de nuestra estructura. En la Figura 4-19 se representa el conjunto de líneas que se han trazado para definir la geometría de la placa.

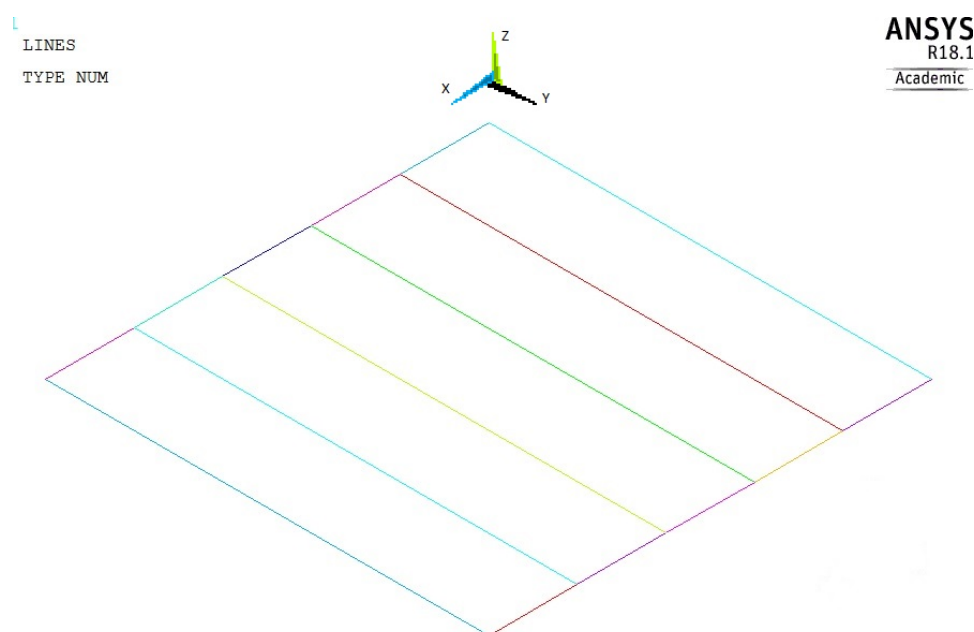


Figura 4-19 Conjunto de líneas conforman la placa con rigidizadores en una dirección.

Una vez definida el esqueleto inicial que sustentará la geometría del elemento y su posterior mallado, se definen los materiales. Tras esto, se define el área de la placa. Es importante remarcar que no es posible definir la placa como un único rectángulo y luego colocar las líneas que, una vez malladas, llegarán a ser los rigidizadores. Esto implicaría que tendríamos vigas cuyos nodos son coincidentes, pero no iguales, a los del elemento Shell y, por tanto, las vigas presentarían un movimiento como sólido rígido. Por ello, es preciso subdividir esta área en superficies más pequeñas para evitar problemas de compatibilidad. Las líneas que se usarán para definir los rigidizadores se han usado como frontera para subdividir el área principal.

En la Figura 4-20 se muestra la placa con las áreas dispuestas y las líneas que conforman los rigidizadores.

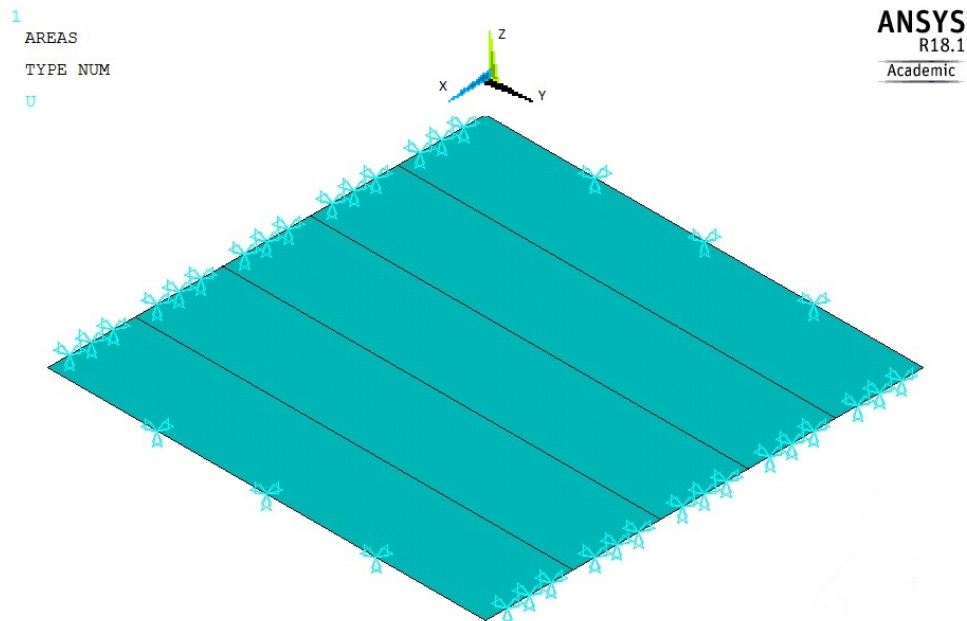


Figura 4-20 Áreas que definen el Modelo de Elementos Finitos en el modelo de placa con rigidizadores en una dirección.

En este punto del modelo hay que tener especial cuidado con las normales de las áreas ya que éstas puede que no estén todas orientadas en la misma dirección debido a la subdivisión en áreas más pequeñas que se ha realizado en la placa. Ello conllevaría que las cargas no se aplicaran todas en la misma dirección. En la figura 4-21 se representan las áreas con todas las normales dispuestas en la misma dirección

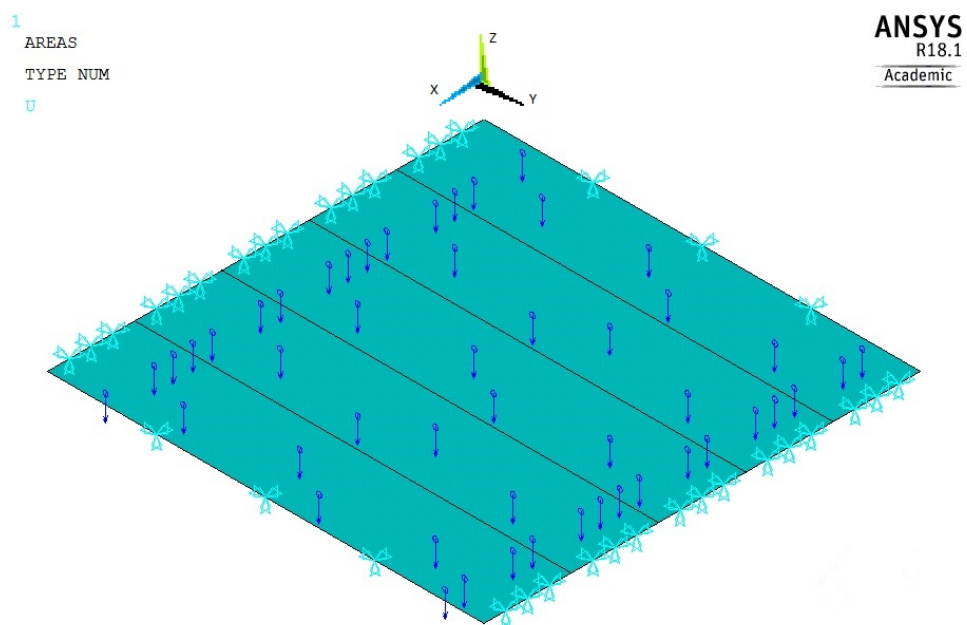


Figura 4-21 Detalle de las normales de las áreas en el modelo de placa con rigidizadores en una dirección.

Tras la ejecución de la geometría del modelo, es necesario seleccionar el tipo de elemento para la placa y para los rigidizadores. Para la placa, el elemento elegido es el SHELL 181, el cual es óptimo para estudiar las placas delgadas y cuyos resultados han sido probados satisfactoriamente

en los ejemplos anteriores. Para el caso de los rigidizadores, el elemento elegido será el BEAM 188. El elemento BEAM 188 es un elemento lineal de dos nodos con seis grados de libertad en cada nodo. Estos grados de libertad incluyen las traslaciones respecto a los 3 ejes, x, y y z y las rotaciones sobre los mismos. El elemento BEAM 188 es un elemento óptimo para las aplicaciones y los problemas de análisis lineal y no lineal.

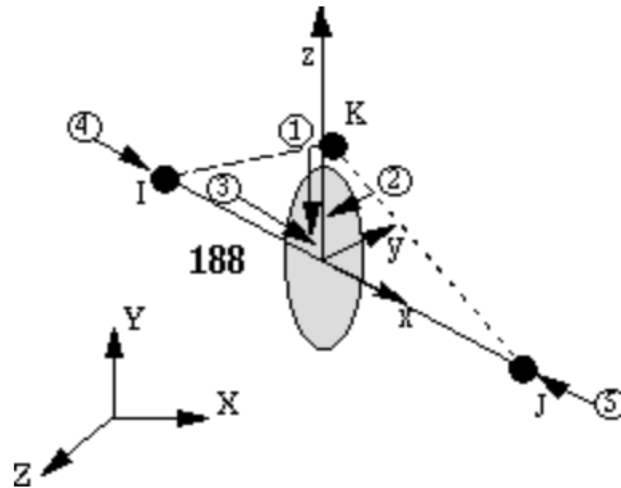


Figura 4-22 . Elemento BEAM 188. Extraído de [1]

Tras la elección del elemento, se determinan las secciones de los rigidizadores. Para ello, en la parte de pre-procesador de ANSYS se elige la sección con la forma que presente el modelo. Cabe destacar que las formas más usuales en la práctica vienen incluidas en el propio programa, sin embargo, es posible definir cualquier sección genérica. En el modelo, se le aporta un OFFSET a la sección para que ésta quede centrada respecto a la placa. En la Figura 4-23 se presenta la sección implementada en ANSYS

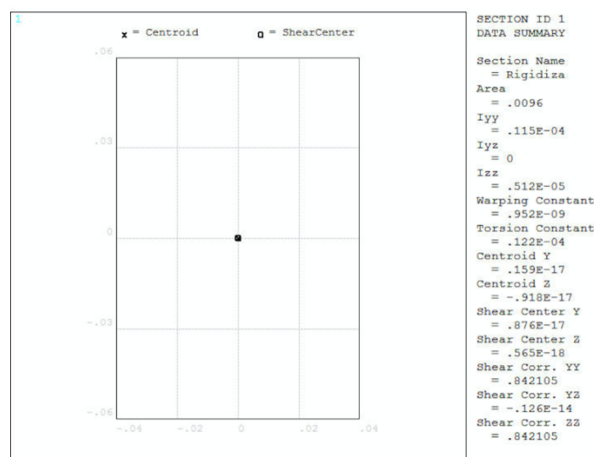


Figura 4-23 Sección de los rigidizadores

Tras la ejecución de estos pasos, se particularizan los atributos que contienen las características de la placa y de los rigidizadores. Los atributos se aplican en todas las áreas asignándoles las características antes definidas de la placa. En el caso de los rigidizadores, se aplican los atributos a las líneas que conformarán los rigidizadores junto con las características de sección definidas.

En este punto es importante destacar que a la hora de asignar los atributos a las líneas es necesario disponer un elemento de referencia, en este caso un keypoint de referencia, el cual sirva de referencia para la orientación de la sección. Así, se definirán, debajo de cada línea que representa a los rigidizadores, un keypoint de referencia. Para cada asignación de los atributos, cada línea irá orientada con su correspondiente keypoint, de tal forma, que todos los rigidizadores queden orientados de igual forma y perpendiculares a la placa. Es importante remarcar que cada línea lleva asignado su propio punto de referencia, no es posible definir un keypoint de referencia global para las secciones.

En la figura 4-24 se muestra la placa con las líneas que conforman los rigidizadores y los keypoint de referencia.

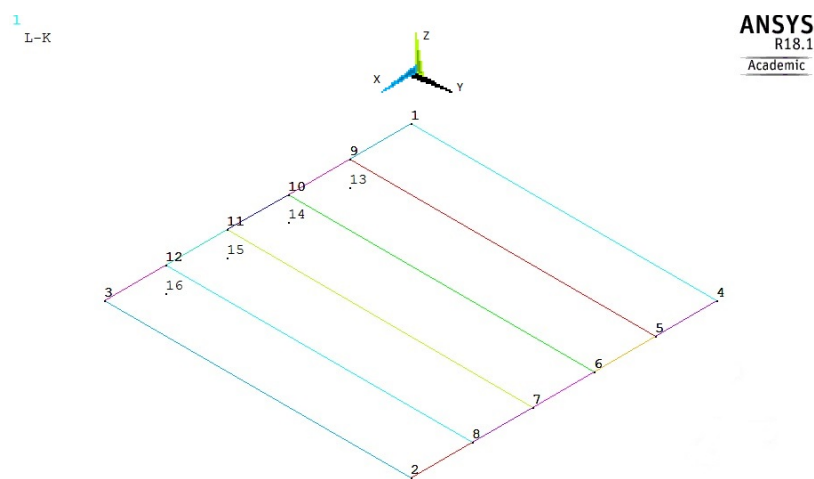


Figura 4-24 Líneas y Keypoint de referencia en la placa con rigidizadores en una dirección.

Una vez realizado la asignación de los atributos, se realiza el mallado de la estructura. Como en los ejemplos anteriores, se realizará un análisis de la convergencia de la malla hasta que el valor de la flecha no varíe de forma significativa. En la Figura 4-25 se muestra la geometría completa de la placa con los rigidizadores dispuestos.

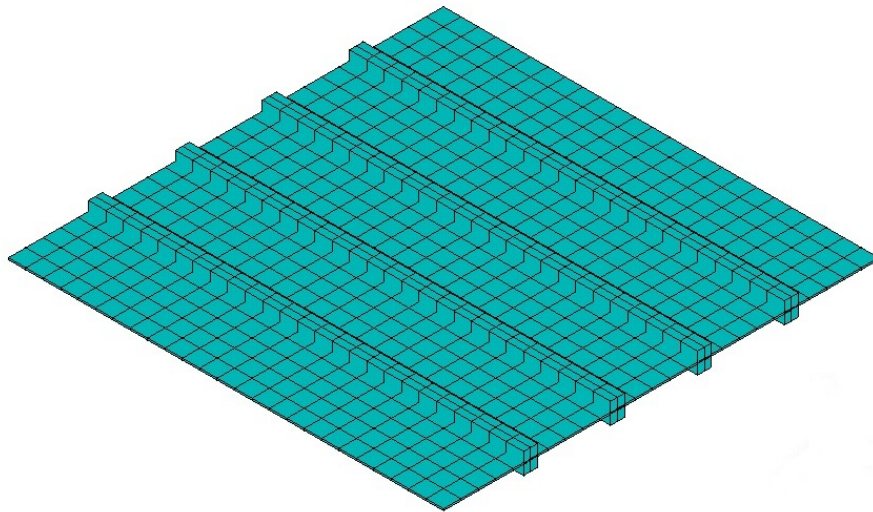
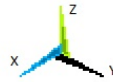


Figura 4-25 Modelo de Elementos Finitos para la placa con rigidizadores en una dirección.

En la Figura 4-26 se expone el detalle del rigidizador modelizado:

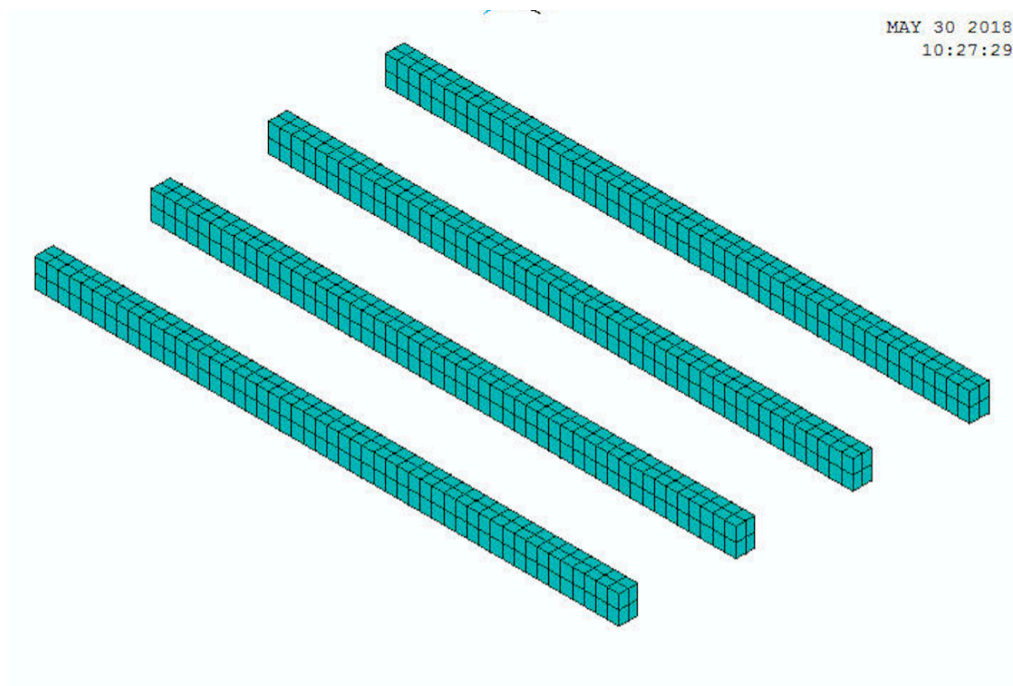


Figura 4-26 Modelo de Elementos Finitos del Rigidizador

Es posible observar como los rigidizadores quedan todos equiespaciados y perpendiculares a la placa de espesor constante. En lo referente a las condiciones de contorno, éstas volverán a ser simplemente apoyado en todos los bordes de la placa, lo cual provoca la restricción de ciertos grados de libertad según el sistema global de referencia. Para finalizar el modelo, se aplica una carga distribuida de 1000 kN/m^2 en toda la superficie. En la Figura 4-27 se presenta el modelo con todas las condiciones de contorno:

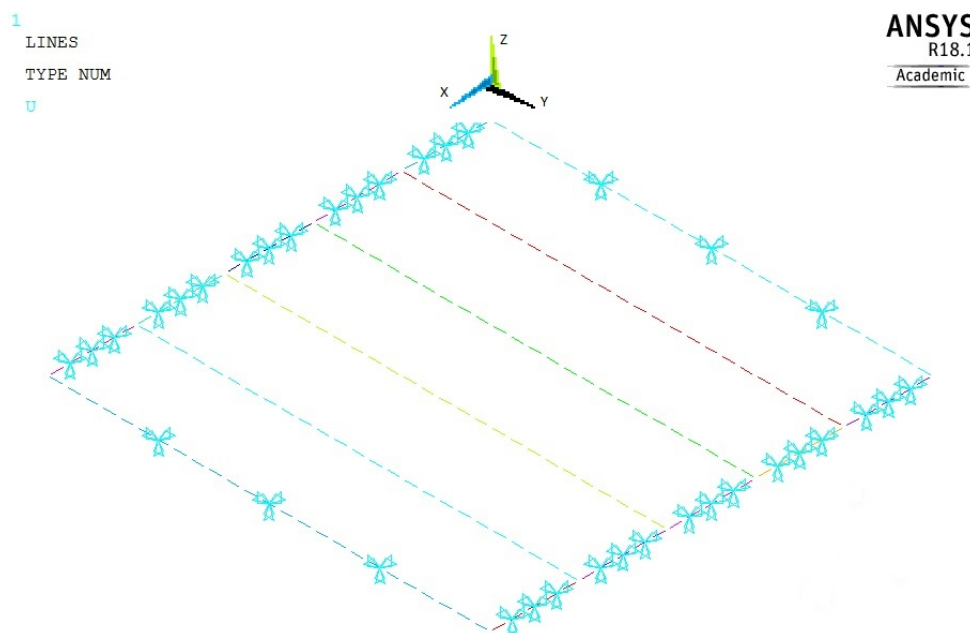


Figura 4-27 Condiciones de contorno placa con rigidizadores en una direcci3n.

Con todo lo descrito anteriormente, se obtiene un valor de la deformaci3n m3xima situado en el punto central de la placa. Los resultados obtenidos tras el estudio de convergencia de la malla se exponen en la Tabla 4-16.

Tabla 4-16 Convergencia de la malla para el modelo de placa con rigidizadores en una direcci3n.

Tama1o del elemento	Flecha m3xima (m)
0.1	0.114e-3
0.05	0.116e-3
0.02	0.117e-3

En la Figura 4-28 se muestra la deformaci3n obtenida:

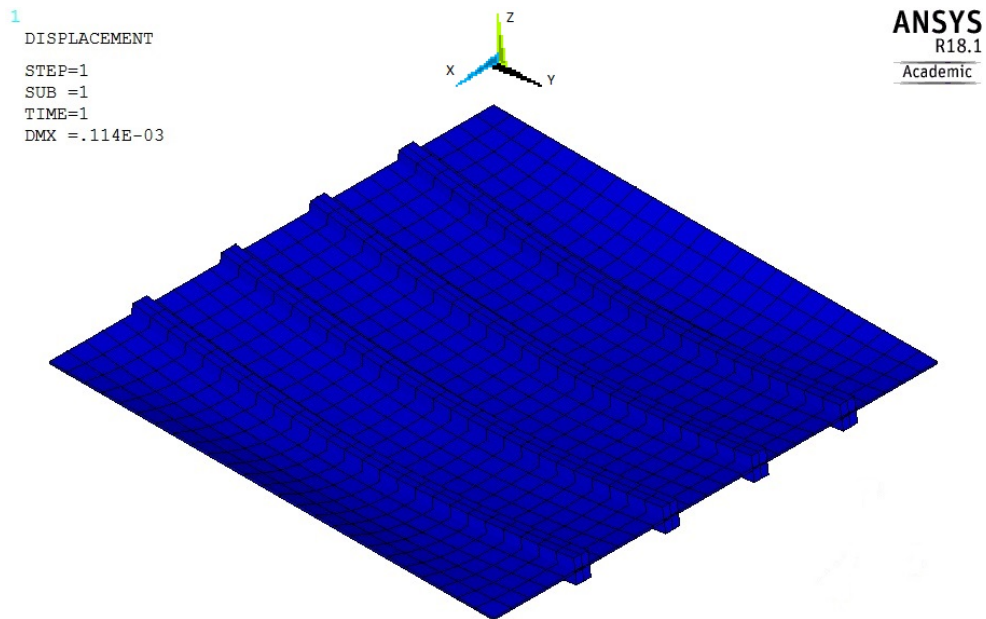


Figura 4-28 Deformación del modelo de placa con rigidizador en una dirección.

De nuevo se observa que el modelo presenta una deformada máxima en el centro de la placa, lo cual es coherente con el marco teórico de placas y láminas. A medida que el modelo va disminuyendo el tamaño de la malla, el modelo converge. En la Figura 4-29 se muestra la tendencia según se disminuye el tamaño de los elementos

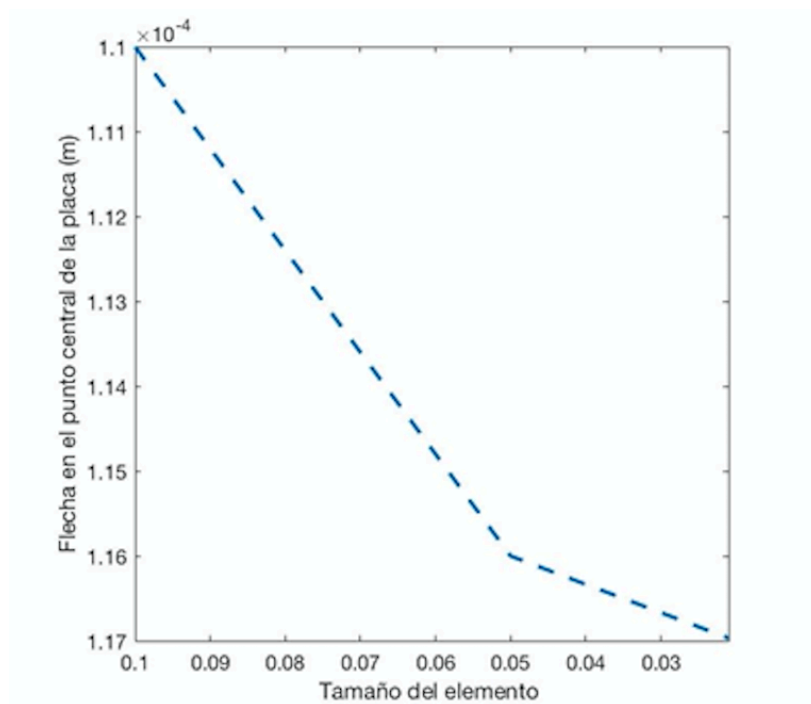


Figura 4-29 Estudio de convergencia de la placa con rigidizadores en una dirección.

Los resultados obtenidos a través del modelo de Elementos Finitos se compararán con los obtenidos de manera analítica usando un código implementado en MATLAB, el cual resolverá la ecuación (1.86) expuesta en el capítulo 2 particularizada a las propiedades del elemento,

condiciones de contorno y carga. Para la resolución de dicha ecuación es necesario disponer de las rigideces equivalentes, las cuales convierten la placa estructuralmente ortótropa como es el caso de la placa con los rigidizadores, a una placa con un material ortotrópicamente equivalente.

De la misma forma que en los ejemplos anteriores, se realizará un doble bucle que vaya realizando la serie numérica conforme a los diferentes valores m y n para resolver la ecuación (1.86) con las rigideces equivalentes incluidas correspondientes a la fórmula (1.65). El modelo completo de MATLAB para la resolución del problema se encuentra en el ANEXO. Los resultados de la implementación en MATLAB se presentan en la Figura 4-30

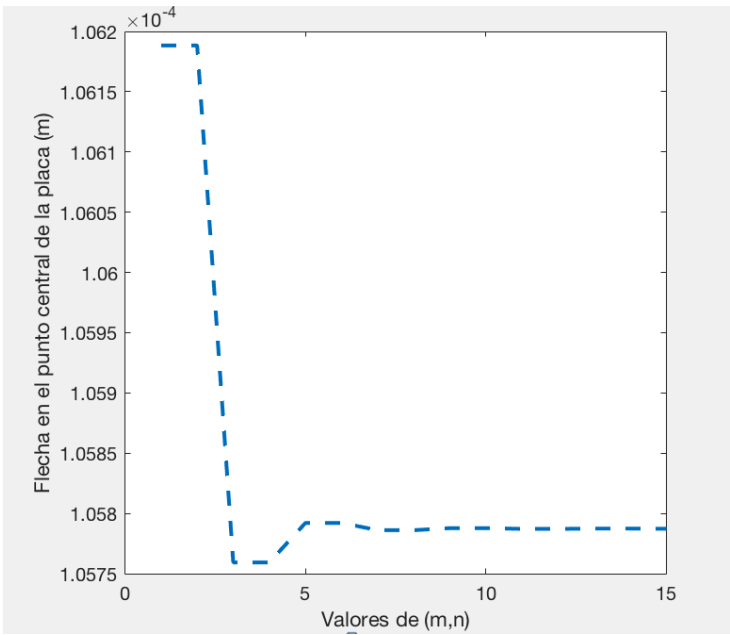


Figura 4-30 Solución analítica del problema placa con rigidizadores en una dirección.

Se observa que el modelo sigue presentando la misma tendencia que los modelos anteriores llegando a converger de manera muy rápida. En la Tabla 4-17 se recogen los valores obtenidos en este estudio por ambos métodos

Tabla 4-17 Soluciones obtenidas en los modelos para la placa con un rigidizador.

	Modelo analítico	Modelo MEF	Error (%)
Flecha en el punto central de la placa (m)	0.0114	0.010579	7.02%

Una vez obtenido los resultados del modelo analítico y el modelo numérico, se procederá al cálculo de los errores entre ambos valores para verificar la validación del modelo. La ecuación del error se toma de (3.1).

Como se puede apreciar los errores cometidos no son muy significativos y se pueden considerar aceptables. Con ello, se puede asegurar que los resultados obtenidos con el modelo de elementos finitos creado son válidos y éste aporta unos buenos resultados. La diferencia obtenida entre ambos valores puede deberse a la utilización de las rigideces equivalentes empleadas en la resolución de las ecuaciones ortótropas. Estas rigideces no son más que una aproximación para

convertir a la placa estructuralmente ortótropa en una placa equivalente ortótropa. Además, es posible que se hayan efectuado un pequeño error de redondeo que, sumado a lo anterior, puede ser el motivo de la diferencia que existe entre ambos valores.

Para validar el comportamiento del modelo de Elementos Finitos y ver que éste es un modelo sólido se propone la comparativa de las deformaciones. Se ha resuelto para todos los puntos de la placa la ecuación con las rigideces equivalentes y se ha obtenido un mapa de deformaciones en todo el dominio. Asimismo, en el programa de elementos finitos se ha obtenido la solución en deformaciones. En las Figuras 4-31 y 4-32 se pueden observar los desplazamientos obtenidos usando el modelo numérico y el modelo analítico.

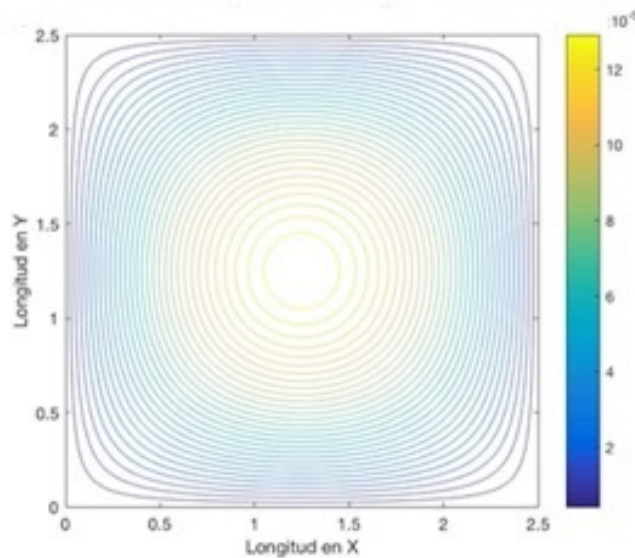


Figura 4-31 Solución correspondiente al modelo analítico de la placa con rigidizadores en una dirección

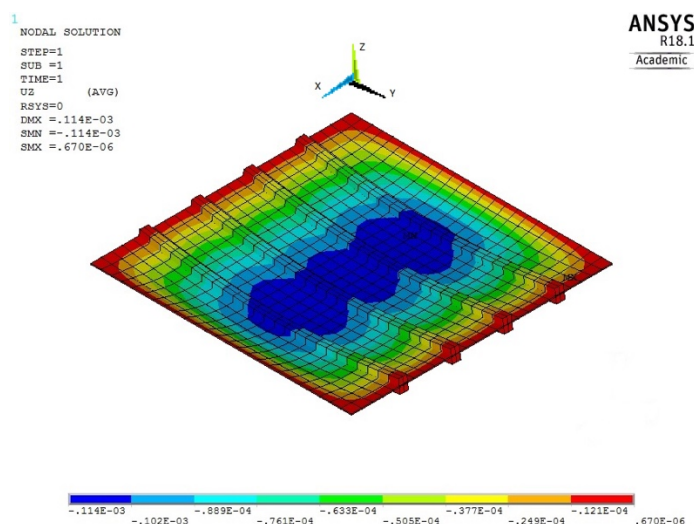


Figura 4-32 Solución correspondiente al modelo numérico para la placa con rigidizadores en una dirección.

Como se puede observar, la tendencia de ambos mapas de deformación es el mismo. La deformación se dibuja a través de círculos concéntricos en torno a un máximo que está situado en el punto central de la placa.

En el modelo analítico, los círculos se observan claramente debido al uso de las rigideces equivalentes que transforman la placa en una equivalente ortótropa y los rigidizadores no existen físicamente. En ambos modelos podemos ver como se cumplen las condiciones de contornos expuesta en todo el perímetro de la placa y se observan como los desplazamientos impedidos en todo su contorno se muestra en las dos figuras.

4.4.1. Estudio de la densidad de rigidizadores en una dirección

Por último, para terminar de comprobar el modelo de elementos finitos realizado en este apartado, se estudiará la influencia del número de rigidizadores colocados en una dirección en una placa que presenta las mismas dimensiones que la estudiada anteriormente.

Para ello, se estudiará el mismo problema planteado con las mismas dimensiones tanto para placa como para los rigidizadores, pero aumentando gradualmente el número de los mismos. Es importante remarcar que los rigidizadores se dispondrán siempre de forma equidistante entre ellos.

De forma paralela, se verificará usando el modelo analítico implementado ya para la resolución en este mismo apartado. En ese modelo, se irá modificando únicamente la distancia entre rigidizadores.

Para realizar el estudio, se ha parametrizado el código APDL en función del número de rigidizadores y de la distancia de los mismos, así a la hora de realizar alguna modificación, ésta es inmediata.

En la siguiente tabla, se recogen la distancia entre los rigidizadores en función del número de los mismos:

Tabla 4-18 Distancia entre rigidizadores

Número de rigidizadores	Distancia entre rigidizadores
2	0.830
4	0.500
6	0.357
8	0.270

A la hora de realizar el modelo de elementos finitos se procede como en el caso ya estudiado. Remarcar que es fundamental dirigir las normales de las áreas todas hacia la misma dirección. En las Figuras 4-33 y 4-34 se presentan los modelos de elementos finitos de la placa con 2 y con 6 rigidizadores, respectivamente:

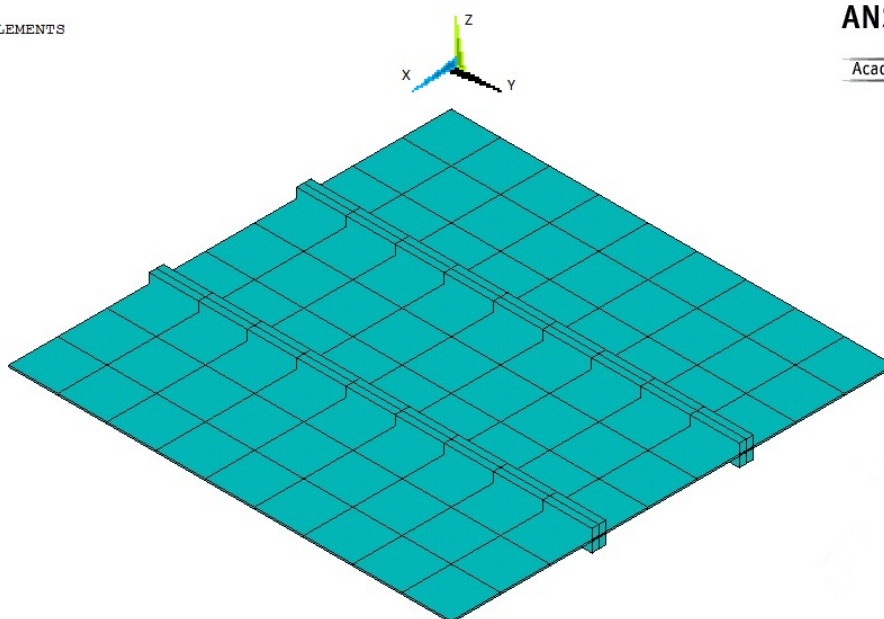


Figura 4-33 Placa con dos rigidizadores en una dirección.

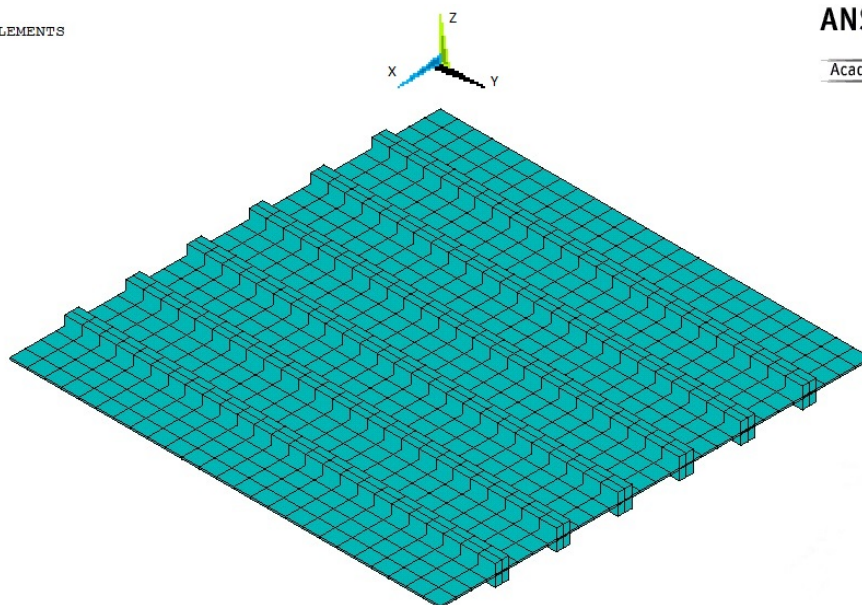


Figura 4-34 Placa con 6 rigidizadores en una dirección.

A modo de resumen, se recogen en la siguiente tabla las deformaciones obtenidas con el modelo numérico y el modelo analítico:

Tabla 4-19 Resultado modificando el número de rigidizadores en una dirección.

Rigidizadores	Flecha modelo analítico (m)	Flecha modelo numérico (m)	Errores
2	1.79433e-4	2.17e-4	17.3134%
4	1.0579e-4	1.14e-4	7.02%
6	7.7496e-5	7.77e-5	3.5225%
8	5.81e-5	5.86e-5	0.8055%

Como se mostró en la ecuación (1.65), los valores de las rigideces equivalentes dependen de la distancia a la que se coloquen los rigidizadores. Sin embargo, para que el modelo sea efectivo, los rigidizadores deben colocarse equiespaciados entre sí. Si se representa gráficamente, se tiene:

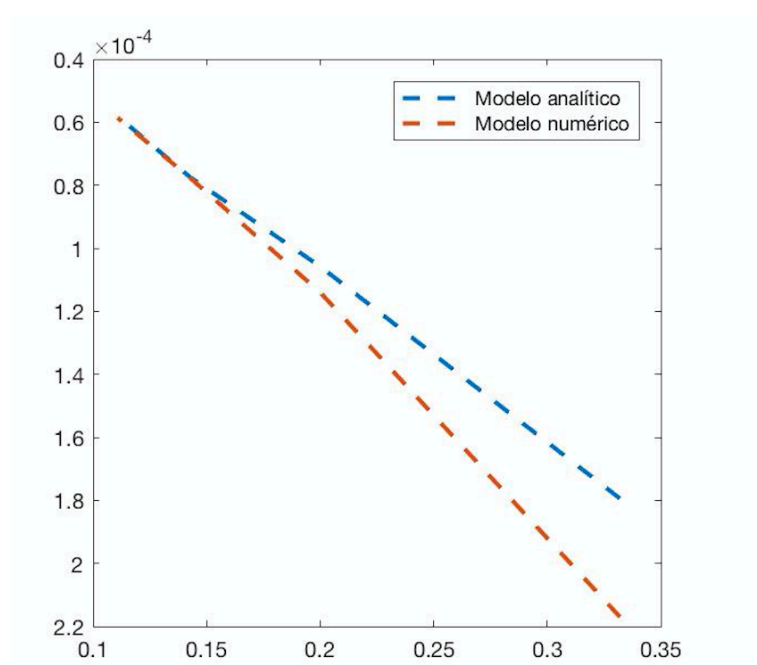


Figura 4-35 Influencia del número de rigidizadores en una dirección.

Como se puede observar en la Figura 4-35, a medida que el número de rigidizadores aumentan, el error cometido entre el modelo analítico y el modelo numérico disminuye de forma notoria, llegando incluso a ser menos del 1% cuando se tienen 8 rigidizadores.

El modelo analítico y el modelo numérico convergen según aumentan los rigidizadores, lo cual nos da otra muestra de los buenos resultados que se obtienen con el modelo numérico. Cabe destacar que un elevado número de rigidizadores puede provocar un mal análisis debido a que la placa puede llegar a convertirse en un elemento emparrillado y los resultados que pueda llegar a proporcionar no tienen nada que ver con los aquí estudiados.

4.5. Placa con rigidizadores en dos direcciones

En esta sección se estudiará un modelo similar al estudiado en el apartado anterior, una placa rectangular con rigidizadores rectangulares que se disponen a lo largo de sus dos direcciones principales. Se construirá un modelo de Elementos Finitos a través de la utilización del software ANSYS. Se definirán todas las propiedades necesarias para la definición completa del modelo numérico, es decir, las características geométricas, mecánicas, propiedades de los materiales y las condiciones de contorno y de carga que se apliquen.

Para validar los resultados de este modelo numérico, se comparará con un modelo analítico implementado en MATLAB usando el código para la placa ortótropa que se viene utilizando en apartados anteriores y cuyos resultados son satisfactorios. Para el modelo analítico, las rigideces equivalentes que se le incluirán al modelo han sido obtenidas de la literatura. Con todo lo anterior, se comparará la exactitud del modelo analítico frente al modelo numérico según lo referido en la bibliografía.

Asimismo, como en el apartado anterior, se llevará a cabo un estudio de la influencia de la densidad de rigidizadores en la placa. Para ello, se aumentará el número de rigidizadores por lado, siempre en la misma proporción y con la misma separación en ambas direcciones, y se comprobará como varía la solución obtenida entre ambos modelos.

La placa objeto de estudio presenta unas dimensiones de 2.5x2.5 m y un espesor de 0.01 m que es constante para toda la placa. Dicho espesor será constante para todos los estudios posteriores que se lleven a cabo en la placa. Los rigidizadores rectangulares se colocan de forma equidistante en cada una de sus direcciones principales, x e y. Tanto el material con el que se construye la placa como el material con el que se construyen los rigidizadores es el mismo, siendo éste un material isótropo como en el caso de rigidizadores en una sola dirección. Para los rigidizadores se ha tomado el menor tamaño existente para la sección rectangular elegida para los mismos, siendo sus dimensiones de 80x120 cm. Las propiedades geométricas de la placa y de los rigidizadores se recogen en la Tabla 4-20 y Tabla 4-21.

Tabla 4-20 Geometría del elemento placa con rigidizadores en dos direcciones.

Dimensión	Valor (m)
Longitud en x	2.5
Longitud en y	2.5
Espesor (h)	0.01

Tabla 4-21 Geometría de los rigidizadores

Dimensión	Valor (m)
Altura (H1)	1.20
Anchura (b)	0.80
Distancia entre rigidizadores en cada dirección principal.	0.50

Las propiedades del material se recogen en la Tabla 4-21.

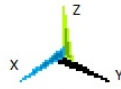
Tabla 4-22 Propiedades del material isótropo de los rigidizadores en dos direcciones.

Dimensión	Valor (m)
E (MPa)	210.000
ν	0.3

Como en el apartado anterior, la construcción del modelo de elementos finitos comienza con la definición de la geometría global de la placa dadas las dimensiones recogidas en la Tabla 4-20. Se delimita, mediante el uso de líneas, un rectángulo de 2.5x2.5m. Este rectángulo será la base para la futura placa.

Sobre ese rectángulo, se trazan las líneas equidistantes, según la equidistancia tomada en la Tabla 2, que representan a los rigidizadores en las direcciones principales. Este conjunto de líneas es la base del modelo de elementos finitos sobre el que realizar el mallado y la aplicación de las condiciones de contorno. En la Figura 4-36 se representa el conjunto de líneas que se han trazado para definir la geometría de la placa.

1
LINES
TYPE NUM



ANSYS
R18.1
Academic

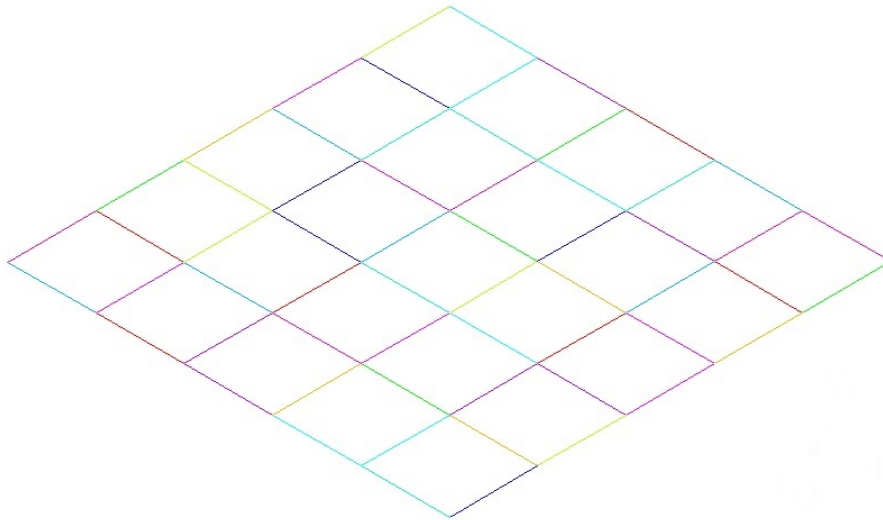


Figura 4-36 Conjunto de líneas conforman la placa con rigidizadores en dos direcciones.

Una cosa importante a la hora de construir el modelo de líneas es realizar el mismo de forma parametrizada según la distancia entre rigidizadores. Así, la alteración del modelo de líneas para poder estudiar la densidad de rigidizadores es inmediata.

Tras la definición de las líneas principales que definen la geometría de la placa, se definen los materiales según las propiedades recogidas en la Tabla 4-22. Una vez dispuestos los materiales en el modelo, se define el área de la placa. Como en el caso anterior, el área para la placa no es posible definirla como un único rectángulo. Con ello, las vigas tendrían movimientos de sólido rígido al no tener nodos iguales a los de la placa, invalidando el resultado numérico obtenido por el modelo. Para definir el área existen diversas opciones, en este estudio, el área se subdividirá en áreas más pequeñas aprovechando la separación que ofrecen las líneas de los rigidizadores. Con ello, se evita los problemas de compatibilidad que puedan producirse. En la Figura 4-37 se muestra la placa con las áreas dispuestas y las líneas que conforman los rigidizadores.

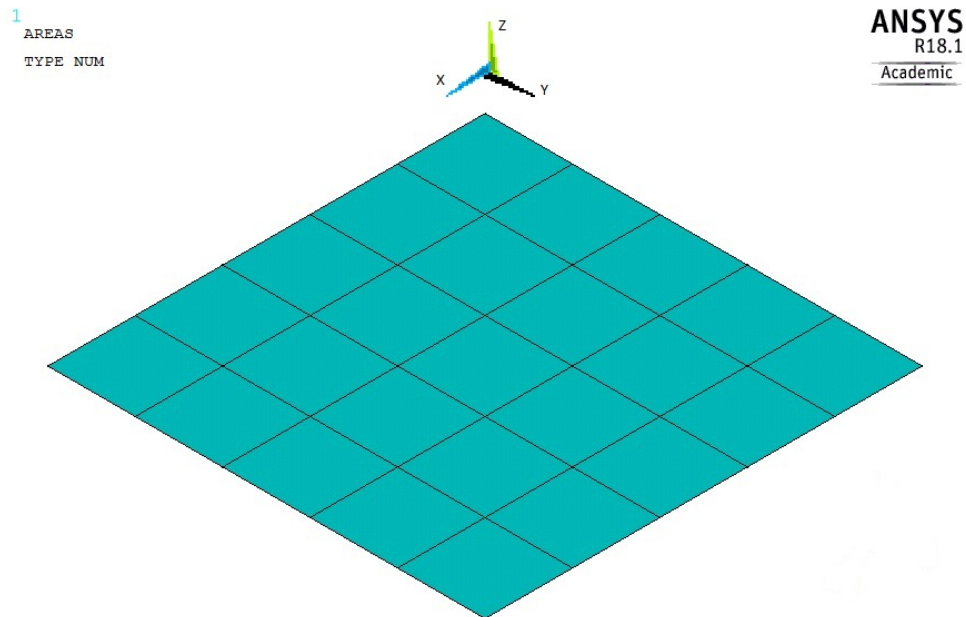


Figura 4-37 Áreas que definen el Modelo de Elementos Finitos de la placa con rigidizadores en dos direcciones.

Otro punto clave del modelo, tras la definición del área y como consecuencia de la subdivisión de la misma, es la orientación de las normales de dichas áreas. Estas normales son las que determinan la dirección de la carga una vez que ésta está aplicada. Es importante colocar todas las normales orientadas en la misma dirección para que la aplicación de la carga fuese uniforme en toda la superficie. En la figura 4-38 se representan las áreas con todas las normales dispuestas en la misma dirección

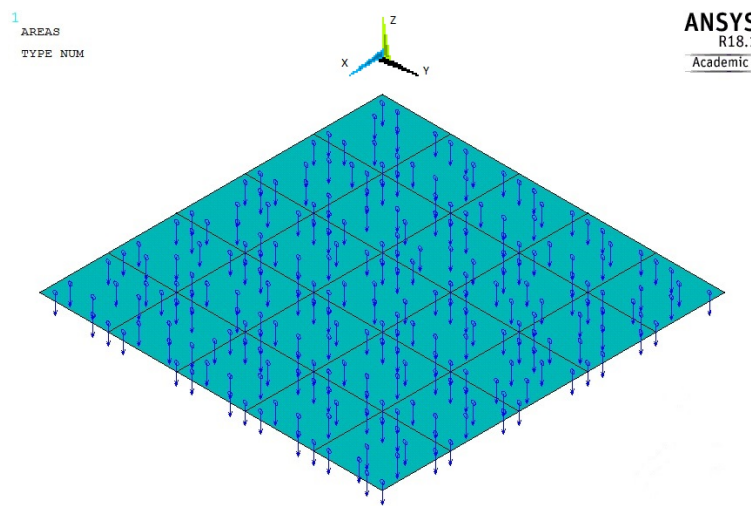


Figura 4-38 Detalle de las normales de las áreas en el modelo de placa con rigidizadores en dos direcciones.

Ejecutado el modelo geométrico del modelo global es necesario seleccionar el elemento empleado tanto para la placa como para los rigidizadores. Los elementos elegidos para este apartado serán los mismos que los elegidos en el caso de rigidizadores en una dirección y cuyos resultados se han validado.

Así, para la placa se tomará un elemento SHELL 181, óptimo para las placas delgadas, y para los rigidizadores se tomará el elemento BEAM 188, elemento lineal con dos nodos y seis grados de libertad por nodo. El elemento BEAM 188 se ha comprobado que proporciona buenos resultados

en las aplicaciones y en los análisis de problemas lineales y no lineales. En la figura 4-22 se representa el elemento BEAM 188.

Para las secciones de los rigidizadores se procede como en el caso anterior. En la parte del pre-procesador de ANSYS es posible elegir la forma de la sección. Es posible crear una forma genérica o, de forma más directa, elegir una de las secciones estándar que recoge el programa. La sección elegida es una sección rectangular donde las propiedades geométricas se recogen en la Tabla 4-21.

Como se aprecia en la Figura 2-6, los rigidizadores están atravesando la placa en todo su espesor. El plano medio de la placa y el plano medio de los rigidizadores son perpendiculares. Para ello, a la sección de los rigidizadores se le aplicará un OFFSET para que quede centrada respecto a la placa. Como la sección es la misma para ambas direcciones no es necesario definir secciones adicionales. En la Figura 4-39. se presenta la sección implementada en ANSYS.

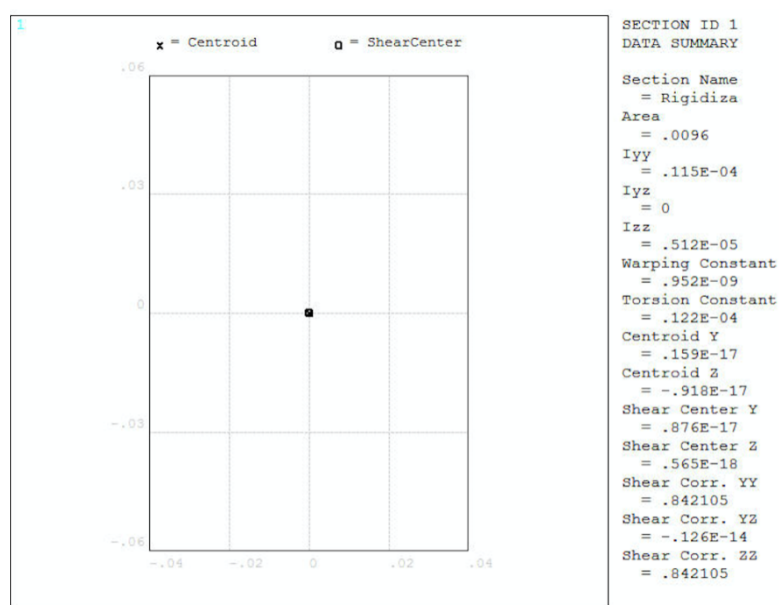


Figura 4-39 Sección de los rigidizadores.

La sección de la placa se realiza introduciendo el espesor recogido en la Tabla 4-20. Para ello, se introduce el espesor en la opción Sección-tipo Shell elegida del menú sección del pre-procesador. En este caso no es necesario efectuar ningún OFFSET, ya que éste se le ha aplicado a los rigidizadores.

El paso siguiente es la particularización de los atributos, que contienen las propiedades de la placa y de los rigidizadores, a las diferentes líneas y áreas del modelo creado hasta ahora. Para la placa, los atributos se aplican en todas las áreas por igual eligiendo las características definidas para la placa. Para el caso de los rigidizadores, los atributos sólo se aplicarán en aquellas líneas que sean las líneas que representan a los rigidizadores. A dichas líneas se les aplica las características de la sección de los rigidizadores.

Es fundamental particularizar bien los atributos según el elemento definido. No es posible definir un elemento tipo SHELL para la placa y asignarle un elemento BEAM posteriormente y viceversa, ya que el modelo no resultará válido.

Otro punto a tener en cuenta, ya destacado en el apartado anterior, es la de disponer elementos de referencia, que serán puntos o keypoints, que sirvan para poder orientar las secciones según la

dirección que interese. Sin éstos puntos, las secciones, una vez malladas, quedarán orientadas arbitrariamente, no estando perpendiculares a la placa como se requiere. Con todo lo anterior, se definen, debajo de cada línea que representa a un rigidizador, un punto que sirva como referencia. En la asignación de los atributos, cada línea llevará asociado su keypoint de referencia, de forma que todos queden orientados de la misma forma. Los keypoint de referencia se colocarán en la misma línea que forma el contorno de la placa, y de la cual parten las líneas de los rigidizadores, pero a diferente altura del contorno para que no sean coincidentes. Esto implica que no es posible asignar las propiedades de los rigidizadores todas a la vez, es necesario ir definiendo línea por línea los atributos y su keypoint de referencia asociado. En la Figura 4-40 se muestra la placa con las líneas que conforman los rigidizadores y los keypoint de referencia.

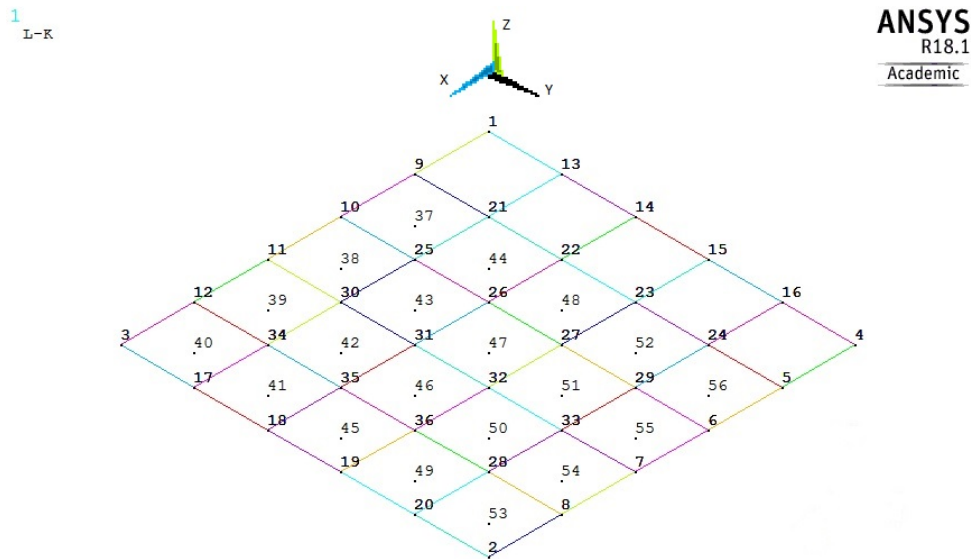


Figura 4-40 Líneas y keypoint de referencia para la placa con rigidizadores en dos direcciones.

Terminada la asignación de los diferentes elementos, se procede al mallado de la estructura completa. Como en apartados anteriores, se realizará un análisis de la convergencia de la malla variando el tamaño de ésta hasta que el resultado obtenido no varíe de forma significativa. En la Figura 4-41 se muestra la geometría completa de la placa con los rigidizadores dispuestos.

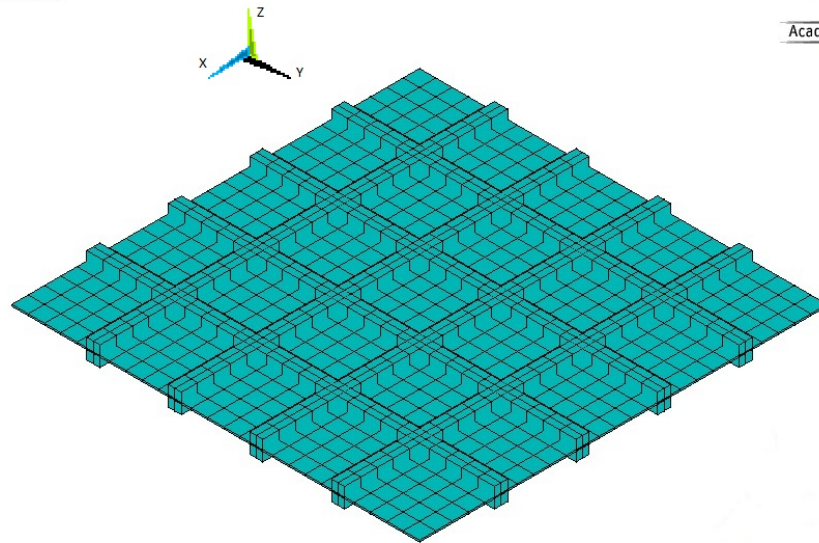


Figura 4-41 Modelo de Elementos Finitos para la placa con rigidizadores en dos direcciones.

En la Figura 4-42 se expone el detalle del rigidizador modelizado:

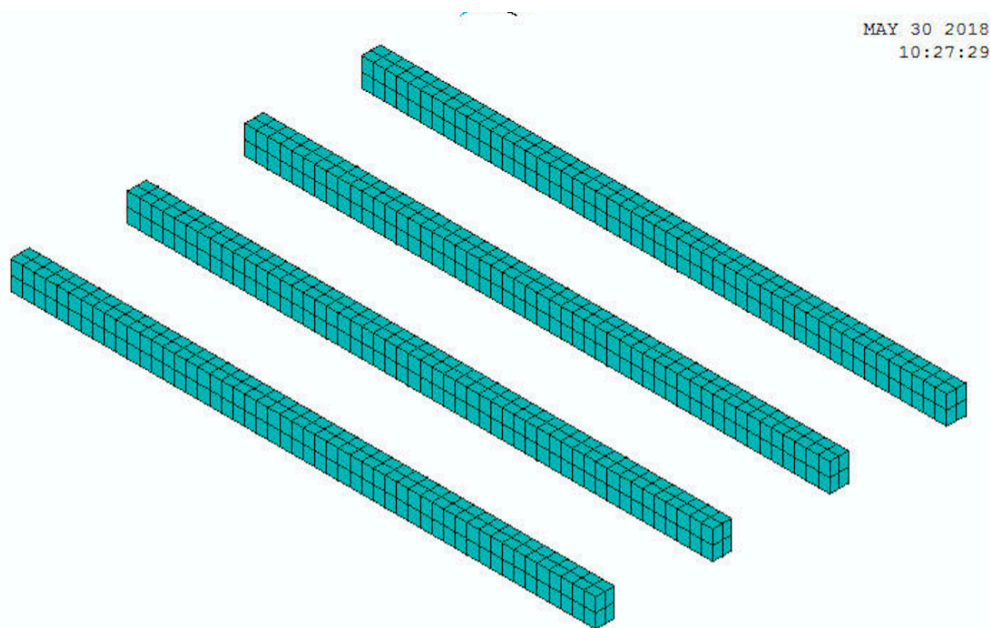


Figura 4-42 Modelo de Elementos Finitos del Rigidizador

Como se observa, todos los rigidizadores quedan perpendiculares y atraviesan el plano medio de la placa como el modelo de la Figura 2-6. Para las condiciones de contorno, se disponen en todos los bordes condiciones de contorno simplemente apoyadas. Para la carga se aplicará un valor constante y repartido en toda su superficie de 1000 kN/m^2 . En la Figura 4-43 se presenta el modelo con todas las condiciones de contorno.

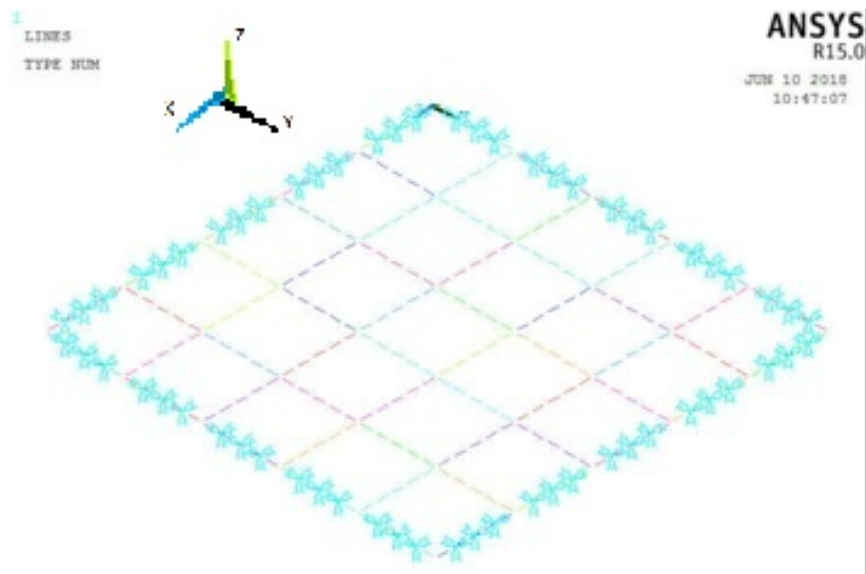


Figura 4-43 Condiciones de contorno sobre el modelo de placa con rigidizadores en dos direcciones

Los resultados obtenidos del modelo numérico descrito se recogen en la Tabla 4-23.

Tabla 4-23 Convergencia de la malla para la placa con rigidizadores en dos direcciones

Tamaño del elemento	Flecha (m)
0.1	0.634e-4
0.05	0.649e-4
0.02	0.651e-4

En la figura 4-44 se muestra la deformación obtenida:

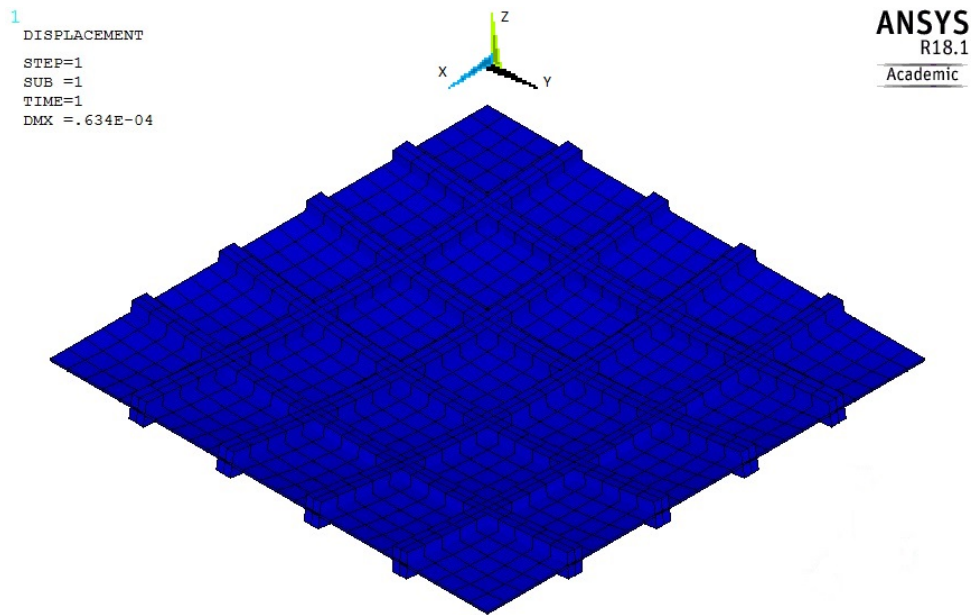


Figura 4-44 Deformación del modelo de placa con rigidizador en dos direcciones

La deformación que se obtiene es coherente con lo estudiado en la teoría y la deformación máxima se produce en el centro de la placa. Como se observa, los rigidizadores se deforman con la placa siguiendo su curva de deformación. A medida que el modelo va refinando la malla, se observa que la deformación converge. En la Figura 4-45 se muestra la tendencia según se disminuye el tamaño de los elementos de la malla:

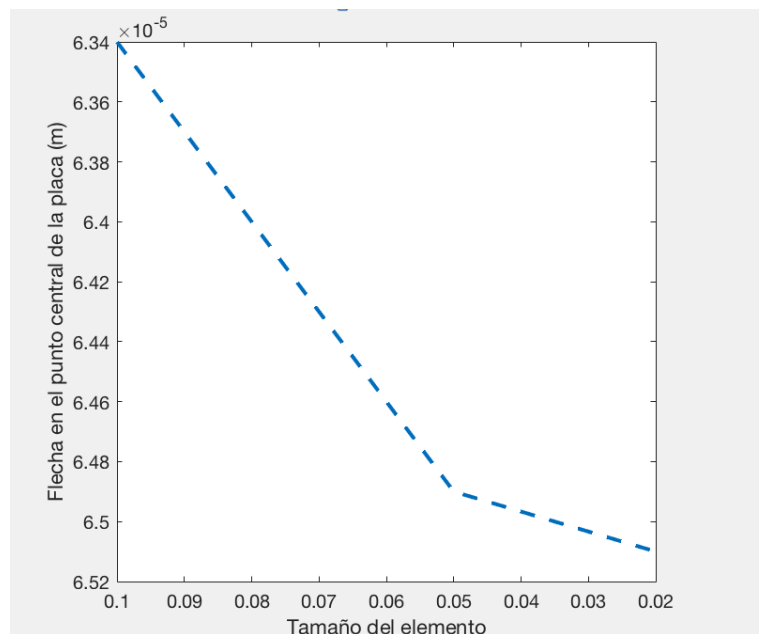


Figura 4-45 Estudio de convergencia del modelo de elementos finitos de placa con rigidizadores en dos direcciones.

Los resultados aquí obtenidos se compararán con los resultados obtenidos a través del modelo de placa ortótropa implementado en MATLAB. Para la resolución de esa ecuación, bajo las condiciones de contorno, geometría y carga, se establecen unas rigideces equivalentes para

convertir a la placa en una estructura ortótropa en una placa con un material ortotrópicamente equivalente.

De igual forma que en los estudios anteriores, se realiza un doble bucle FOR según los valores de m y n , que va resolviendo la ecuación con las rigideces equivalentes de las ecuaciones (1.66) - (1.67). Los resultados de la implementación en MATLAB se presentan en la figura 4-46

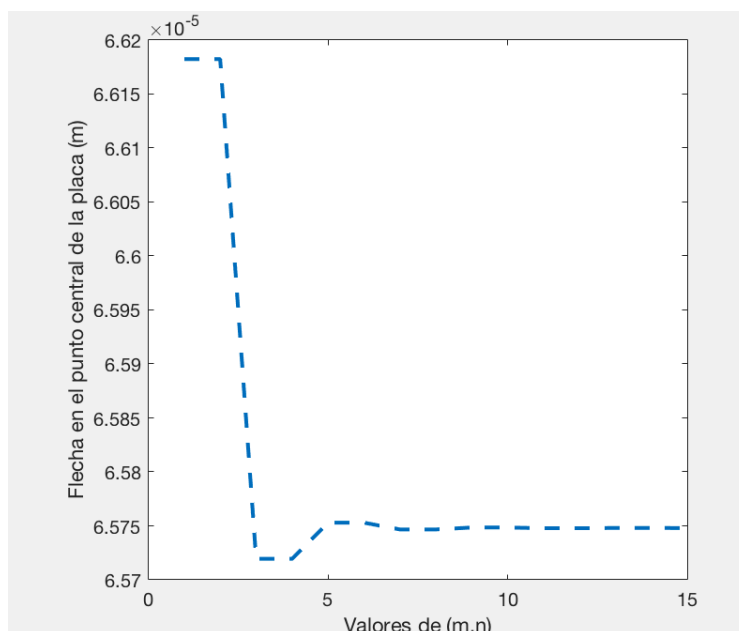


Figura 4-46 Solución numérica del problema de placa con rigidizadores en dos direcciones

Siguiendo la tendencia que se viene produciendo en este trabajo, el modelo analítico converge muy rápidamente y se alcanza la solución con pocas iteraciones. En la tabla 4-24 se recogen los valores obtenidos en este estudio por ambos métodos

Tabla 4-24 Soluciones obtenidas para la placa con rigidizadores en dos direcciones.

	Modelo analítico	Modelo MEF	Error
Flecha en el punto central de la placa (m)	0.6575e-4	0.651-4	0.913%

Donde el error cometido se ha calculado usando la ecuación (3.1). Se puede apreciar que el error cometido es insignificante estando por debajo incluso del 1%. Por tanto, se puede concluir que el modelo creado con Elementos Finitos proporciona resultados satisfactorios y es un modelo aceptable.

La diferencia que se observa entre ambos modelos puede deberse a un pequeño error en la convergencia del modelo analítico que conlleve un pequeño error en la resolución de la flecha máxima. Asimismo, las expresiones para las rigideces empleadas en la formulación del modelo analítico son expresiones aproximadas y éste puede ser otro de los motivos de la diferencia existente entre ambos valores.

A continuación, se expone el mapa de deformaciones obtenido a través del programa de elementos finitos. A su vez, como en apartados anteriores, se ha resuelto la ecuación de la placa ortótropa,

junto con sus rigideces correspondientes, para todos los puntos de la placa y se ha obtenido un mapa de deformaciones. En las Figuras 4-47 y 4-48 se comparan ambas figuras:

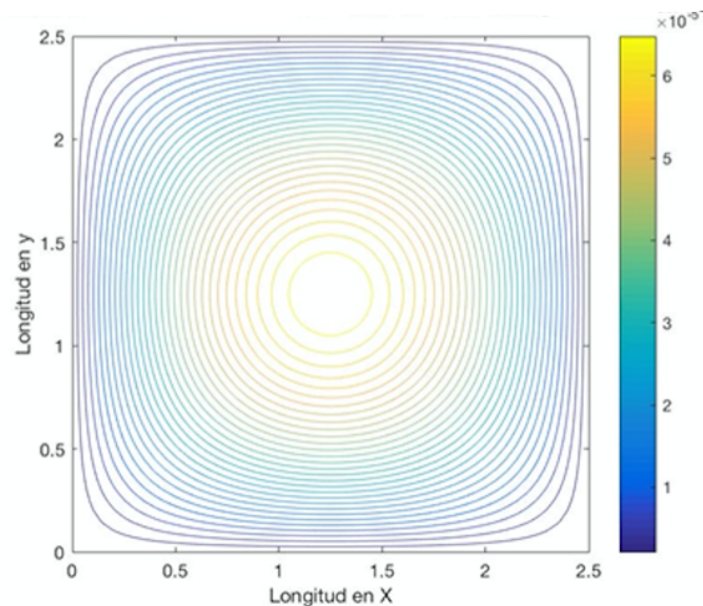


Figura 4-47 Conjunto de soluciones para el modelo analítico de placa con rigidizadores en dos direcciones.

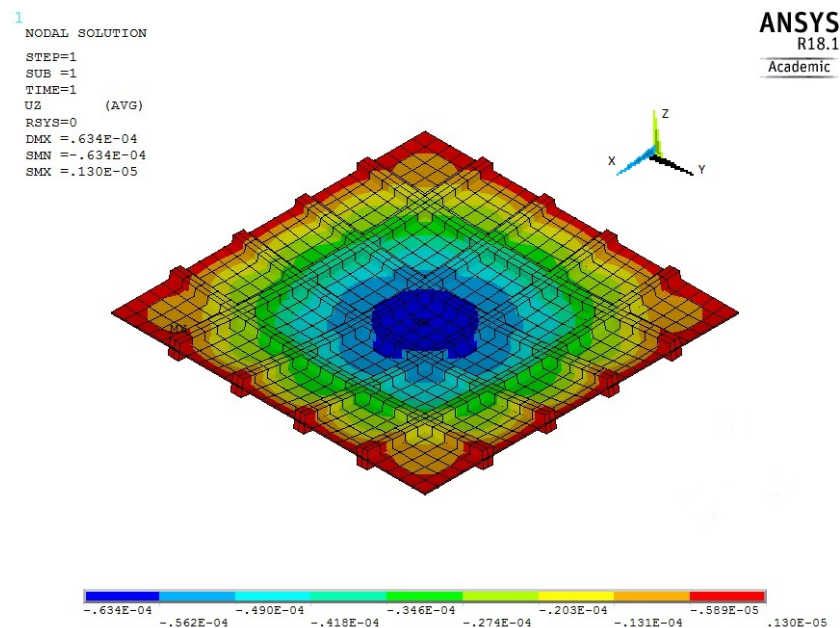


Figura 4-48Conjunto de soluciones para el modelo numérico de placa con rigidizadores en dos direcciones.

Se aprecia la similitud en la tendencia de ambas deformaciones. La deformación que se produce es máxima en los puntos centrales de la placa y en los entornos de la misma. A su vez, en los bordes se cumplen las condiciones de contorno que se han impuesto en ambos modelos. La deformación se dibuja a través de círculos concéntricos con el máximo en el centro de la placa. En ambos modelos se observa esta tendencia siendo mucho más clara en el mapa del modelo analítico. Esto es debido al uso de las rigideces equivalentes que transforma la placa original

objeto de estudio en una placa donde los rigidizadores no están presentes físicamente, pero es ortotrópicamente equivalente.

4.5.1. Estudio de la densidad de rigidizadores en dos direcciones

En este apartado se realizará un estudio de la influencia de la densidad de los rigidizadores colocados en las dos direcciones de la placa.

Se comenzará estudiando una placa de unas dimensiones similares a la estudiada anteriormente, aumentando la densidad de los rigidizadores y viendo cómo evoluciona la flecha máxima. A continuación, se estudiarán diferentes tamaños de placa y, en ellos, se variará la densidad de rigidizadores en ambos lados de la placa para ver su evolución.

Tanto los rigidizadores como el espesor de la placa se mantienen constantes con lo ya descrito en este apartado. Es importante remarcar que los rigidizadores se mantendrán siempre equidistantes entre ellos.

El estudio se lleva a cabo realizando una parametrización en el código APDL del programa de elementos finitos empleado para estudiar la placa con 4 rigidizadores por lado. Se toma como parámetro la distancia entre los rigidizadores y el número de los mismos.

En la siguiente tabla, se recogen la distancia entre los rigidizadores en función del número de los mismos:

Tabla 4-25 Distancia entre rigidizadores en dos direcciones.

Número de rigidizadores	Distancia entre rigidizadores
2	0.830
4	0.500
6	0.357
8	0.277

Para el modelo de elementos finitos se procede como en el caso anteriormente comentado. En el código implementado en MATLAB se resuelve la ecuación alterando, para cada ejemplo, la distancia existente entre los rigidizadores. En las Figuras 4-49 y 4-50 se presentan los modelos de elementos finitos de la placa con 2 y con 6 rigidizadores, respectivamente:

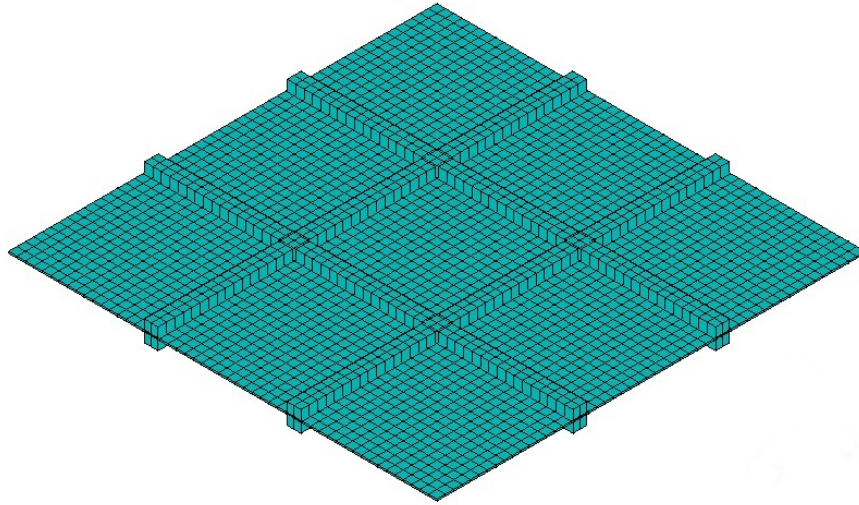
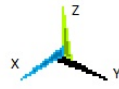


Figura 4-49 Placa con dos rigidizadores en dos direcciones.

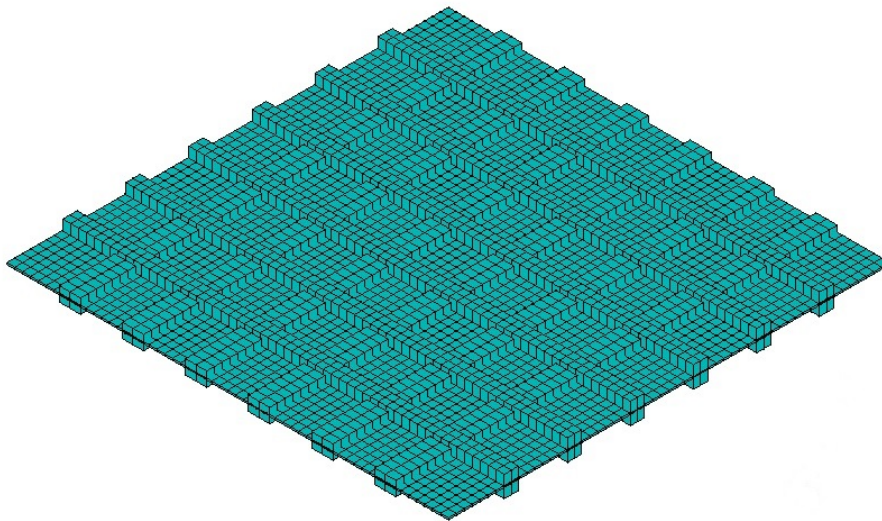
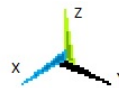


Figura 4-50 Placa con seis rigidizadores en dos direcciones.

En la Tabla 4-26 se recogen las deformaciones obtenidas con el modelo numérico:

Tabla 4-26 Resultados de los modelos modificado el número de rigidizadores en dos direcciones

Rigidizadores	Flecha modelo numérico (m)	Flecha modelo analítico (m)	Errores (%)
2	1.34e-4	1.09e-4	18.66%
4	0.634e-4	0.65748e-4	3.59%
6	0.557e-4	4.7051e-5	15.33%
8	5.86e-5	3.665e-5	43.09%

Si se representa gráficamente:

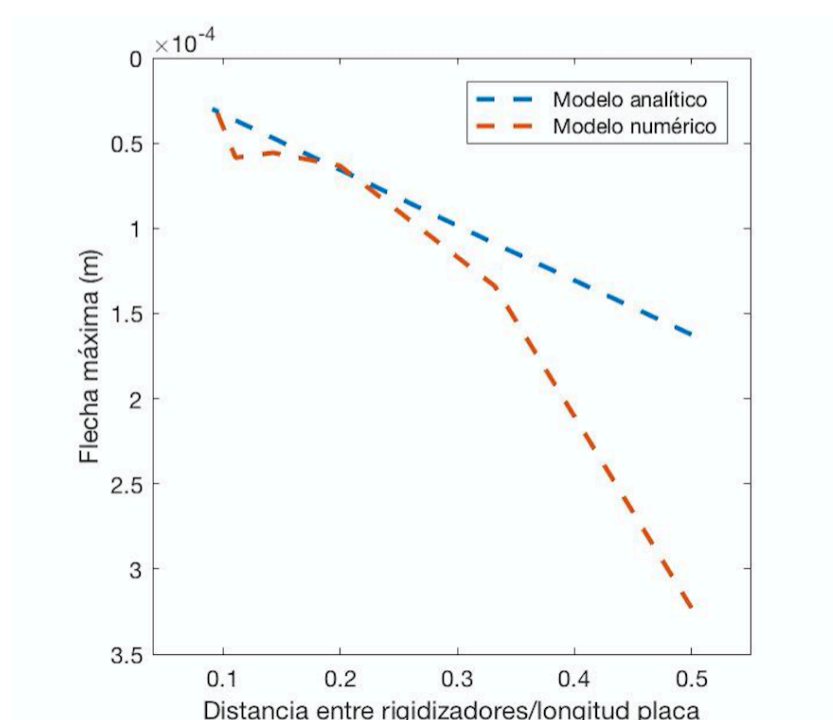


Figura 4-51 Influencia de los rigidizadores en dos direcciones en placa de 2.5x2.5m.

Como se puede observar en la Figura 4-51, existe una zona donde el modelo aporta unos resultados óptimos para la densidad de rigidizadores dado. Conforme se aleja de dicho entorno, el modelo cada vez comienza de divergir más de la solución analítica calculada con MATLAB. Esta divergencia puede deberse a que al aumentar el número de rigidizadores en el modelo numérico, el modelo de placa ortótropa pase a ser una estructura de tipo emparrillado y, por tanto, los resultados que aporta no tienen nada que ver con el problema a estudio. A su vez, las rigideces que se han utilizado en el modelo analítico son rigideces equivalentes, por lo que han podido introducir ciertos errores que, conforme se aumente el número de rigidizadores, den lugar a un mayor número de errores.

Para confirmar la tendencia del modelo y ver si es correcto, se han repetido los cálculos tanto del modelo numérico como el modelo analítico en una placa de dimensiones de 5x5m y espesor 0.01. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4-52:

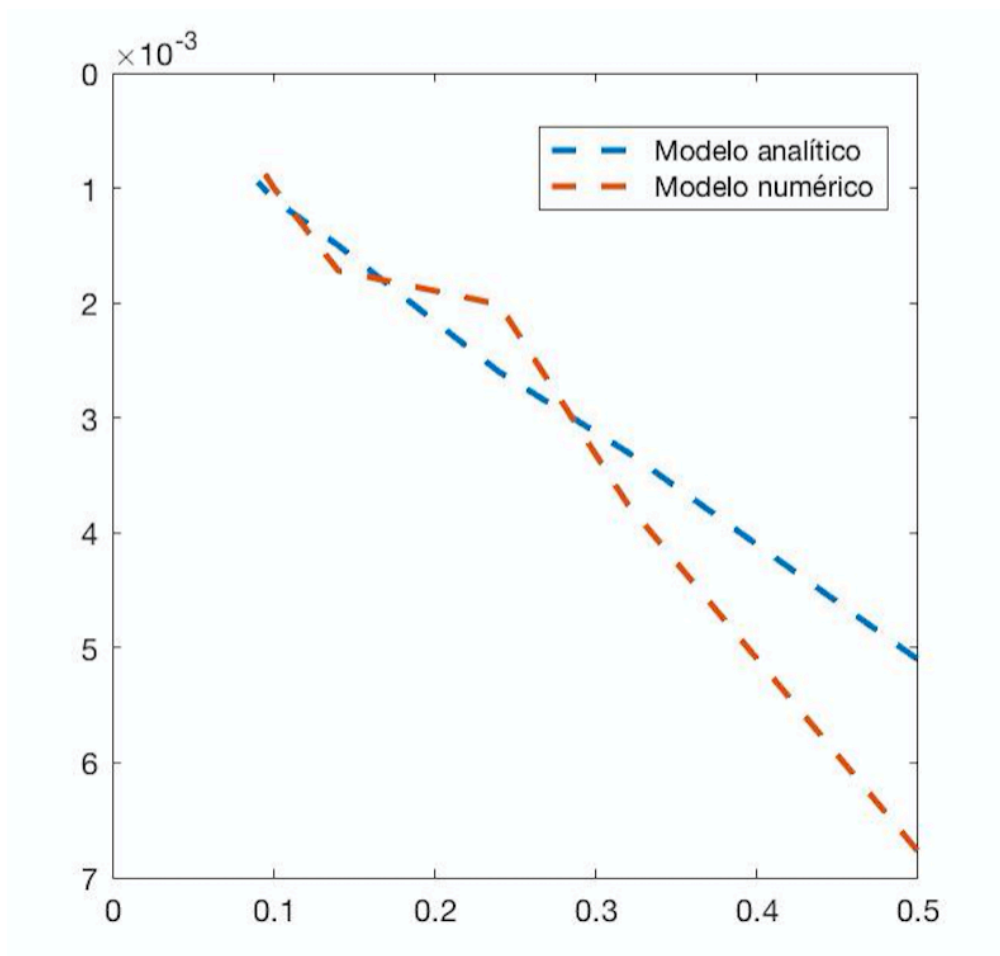


Figura 4-52 Influencia de los rigidizadores en dos direcciones en placa de 5x5m.

Como se puede observar, se presenta el mismo comportamiento. El modelo numérico y el modelo analítico, con poca densidad de rigidizadores, van convergiendo hasta una densidad de rigidizadores óptima para las dimensiones de la placa dada. A partir de ese momento, el modelo numérico comienza a divergir del modelo analítico como consecuencia de la gran cantidad de rigidizadores por lado. A medida que los rigidizadores aumentan, la placa pasa a ser estructuralmente un emparrillado y su solución se aleja de la calculada por el método analítico.

4.6. Placa corrugada.

En este apartado se estudiará con detalle un modelo de una placa de espesor constante ondulada en una de sus direcciones principales. Se definirá un modelo de Elementos Finitos a través del software ANSYS para realizar el estudio, en el que se introducirán todas las propiedades, materiales, condiciones de contorno y en carga necesarias para desarrollarlo satisfactoriamente.

Para la validación del modelo numérico se creará, paralelamente, un modelo analítico implementado en MATLAB haciendo uso del código de resolución de placa ortótropa anteriormente empleado en los apartados anteriores. Las rigideces equivalentes necesarias para el modelo de placa corrugada se volverán a tomar de la bibliografía. Con todo lo anterior, se realizará un estudio comparando ambos modelos que arroje luz sobre la validez de los resultados obtenidos con el modelo de elementos finitos implementado.

Se estudiará un problema concreto de placa ondulada con una longitud de placa y número de ondas establecido. Posteriormente, se estudiarán diferentes tamaños de placas, así como se variará el número de ondas completas que posea la placa a estudio. Con esto, se estudiará cómo evoluciona la solución según aumente la densidad de ondas en una placa determinada.

En este caso, la placa ondulada a estudio presenta unas dimensiones de 5x5m que presenta espesor constante para toda la placa de 0.003m. La placa está formada por 100 ondas completas con una amplitud de onda 0.050m y con una longitud de onda completa de 0.050m. El material de la placa es acero. Las propiedades geométricas y del material se recogen en la Tabla 4-27 y Tabla 4-28.

Tabla 4-27 Geometría de la placa ondulada

Dimensión	Valor (m)
Longitud en x	5
Longitud en y	5
Espesor (h)	0.003
Amplitud (H)	0.050
Número de ondas completas (n)	100
Semilongitud de onda (s)	0.0250

Tabla 4-28 Propiedades del material isótropo de la placa ondulada.

Dimensión	Valor
E (MPa)	210.000
ν	0.3

La modelización con Elementos Finitos comienza definiendo la geometría de la placa con las dimensiones expuestas en la Tabla 4-27. Dicha modelización estará parametrizada en función de la longitud de la placa, del número de ondas completas y de la longitud de la semionda. Realizar

esta parametrización es fundamental para poder estudiar el gran abanico de casos que se presenta en este apartado.

Para realizar el modelo de la placa ondulada se creará una onda completa a través del programa de elementos finitos. Definida la geometría de la onda completa, ésta se replicará tantas veces como sea necesario usando una serie de comando especiales en ANSYS que construirán la placa con todas las ondas requeridas.

Así, se comienza definiendo el modelo de elementos finitos definiendo una serie de puntos que van a delimitar los extremos de la onda a replicar. Dichos puntos siguen una ecuación en forma de senos que ha sido obtenida de la bibliografía [3].

$$y = H * \sin\left(\frac{\pi * x}{s}\right) \quad (3.2)$$

Donde los valores de H y s están definidos y recogidos en la Tabla 4-27

Con ello, se ha discretizado la longitud de onda y, por consecuencia, la onda completa en 9 partes para su posterior construcción. Con dichos valores discretizados para la longitud de onda y la ecuación anterior, es posible construir la onda completa a base de puntos. La onda completa se presenta en la siguiente figura.

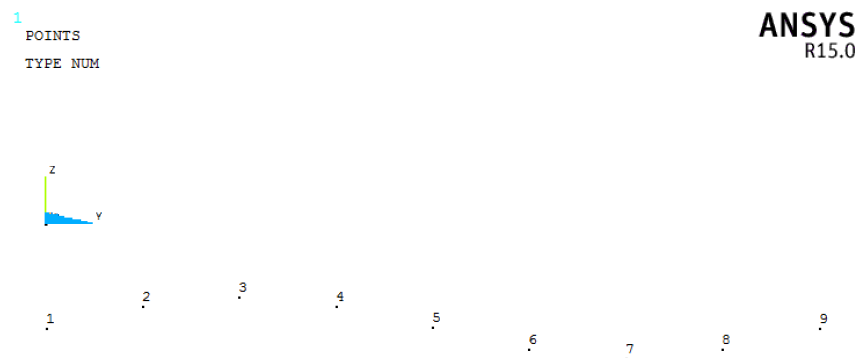


Figura 4-53 Nube de puntos para la construcción de la onda

Tras la construcción de esta nube de puntos, que conforma una onda completa, es necesario crear un conjunto de puntos idénticos pero situado en el otro extremo de la placa. Ambas nubes de puntos simbolizan los bordes ondulados de la placa. Para evitar volver a tener que definir toda esa serie de puntos se ha empleado el comando KGEN en ANSYS, el cual genera una serie de keypoints adicionales en base a un patrón de puntos ya determinados. Para ello, es necesario señalar cuales son los puntos a copiar y el número total de copias que se desea. Es importante remarcar que para definir el número de copias hay que contar con el original. Así, el número debe ser mayor que uno para que la generación de puntos ocurra. Con todo esto, en la Figura 4-54 se representan los dos conjuntos de puntos que hacen referencia a los extremos de la placa:

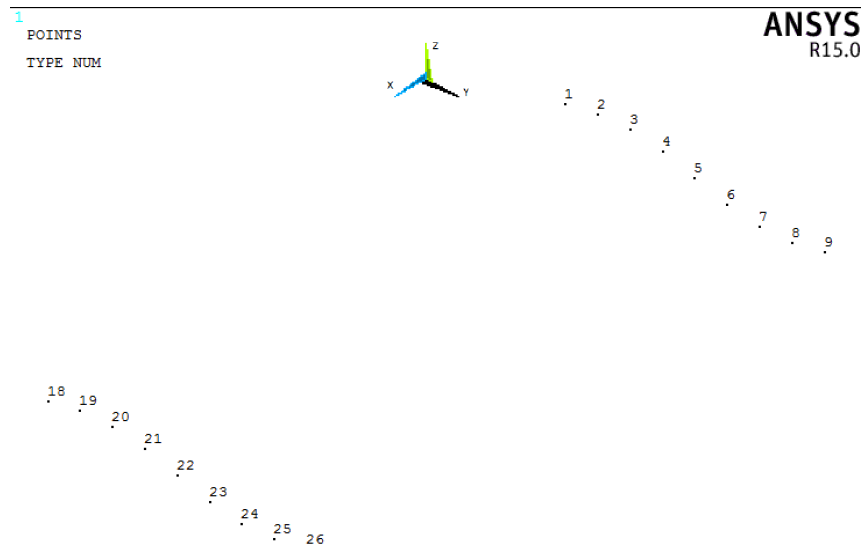


Figura 4-54 Nube de puntos para la construcción de la onda completa.

Una vez realizada la construcción del conjunto de puntos, se trazan las líneas que definen la geometría de la placa. Los extremos se unen con líneas rectas mientras que los puntos que conforman la onda es necesario unirlos usando un SPLINE. Dentro de las opciones de línea del pre-procesador de ANSYS es posible seleccionar esta opción y, a través de una serie de puntos, definir una línea que se adapte a dichos puntos. Remarcar que el número máximo de puntos que permite tomar el SPLINE para la construcción de una línea es 5, por tanto, la línea del contorno de la onda se construye empleando dos líneas y no una única línea continua. En la Figura 4-55 se representa la geometría de líneas de la onda

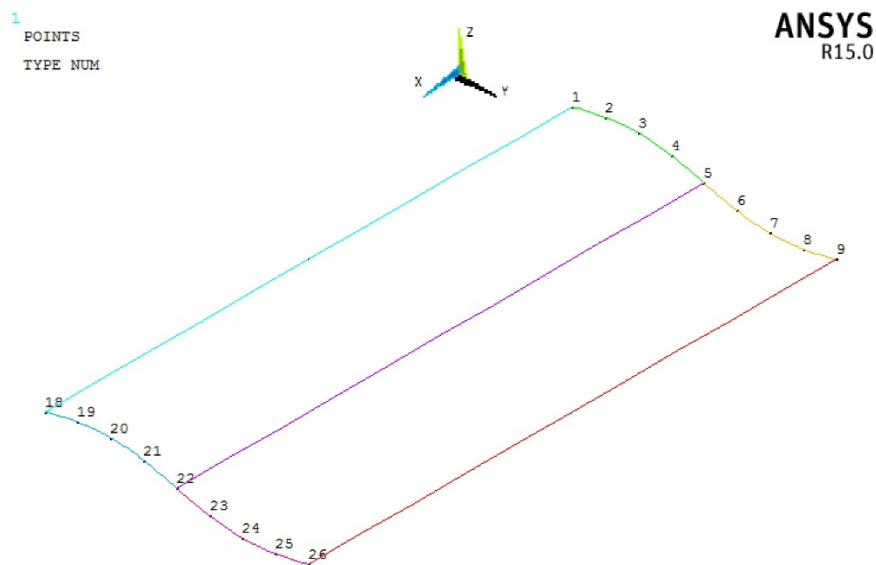


Figura 4-55 Conjunto de líneas que forman la onda completa.

Como se observa, las líneas de la onda quedan perfectamente definidos haciendo uso del comando SPLINE. Importante señalar que se ha añadido una línea adicional a una distancia igual a la semilongitud de onda que divide a la onda completa en dos. En la Figura 4-55, se aprecia dicha línea dibujada en morado.

La necesidad de esta línea responde a la definición de las áreas. Es preciso definir esta línea para poder dividir el área global en subáreas y poder definir el área de forma correcta. Como en modelizaciones anteriores, no es posible definir el área como un único elemento ya que provocaría inconsistencias en el modelo. Otro motivo más es que en el programa de elementos finitos no es posible definir el área empleando más de 4 líneas, por tanto, en el modelo hubiera sido imposible la creación de esta área de una sola vez. Por último, la creación del área del modelo de la onda completa como dos subáreas nos facilitará su replicación posterior para la construcción de la placa ondulada completa. En la Figura 4-56 se muestra la onda con las áreas dispuestas.

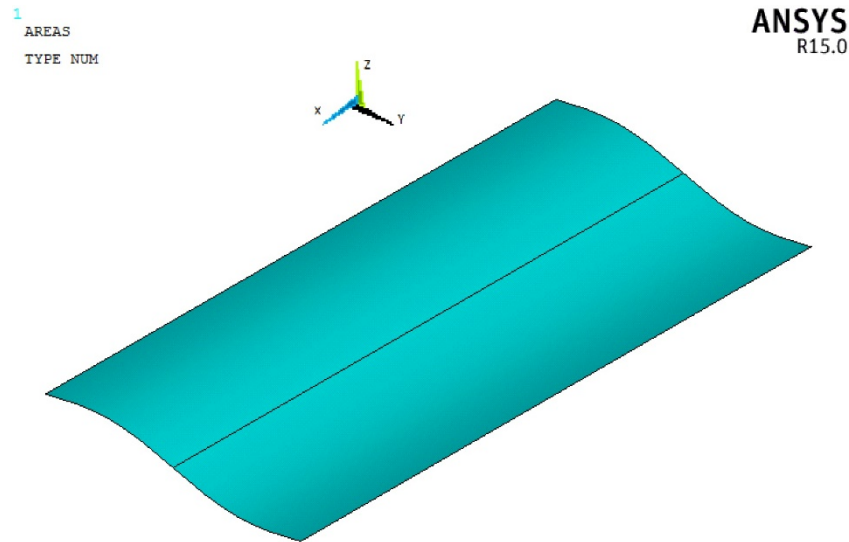


Figura 4-56 Áreas de la onda completa.

Esta onda completa modelizada mediante elementos finitos se replicará en base al número de corrugas que presente la placa a estudiar. Del mismo modo que se replicaron los puntos usando el comando KGEN, es posible replicar el área usando el comando AGEN en ANSYS. A este comando es necesario aportarle el número de veces que se quiere generar el área y a qué distancia se va a replicar. Para ello, se le introducen el número de ondas completo y la longitud de onda parametrizados ambos valores, respectivamente.

Con ello, es posible definir cualquier geometría de la placa ondulada para unos valores de longitud de onda, tamaño de la placa y número de ondulaciones completas. En las siguientes figuras se representa la placa para diferente número de ondulaciones.

1
AREAS
TYPE NUM

ANSYS
R15.0

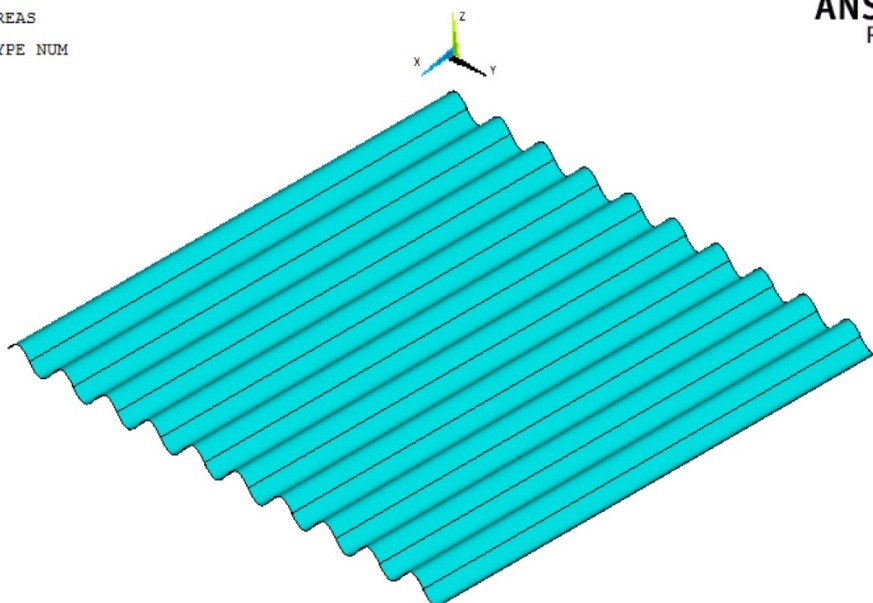


Figura 4-57 Placa ondulada con $n=10$

1
AREAS
TYPE NUM

ANSYS
R15.0

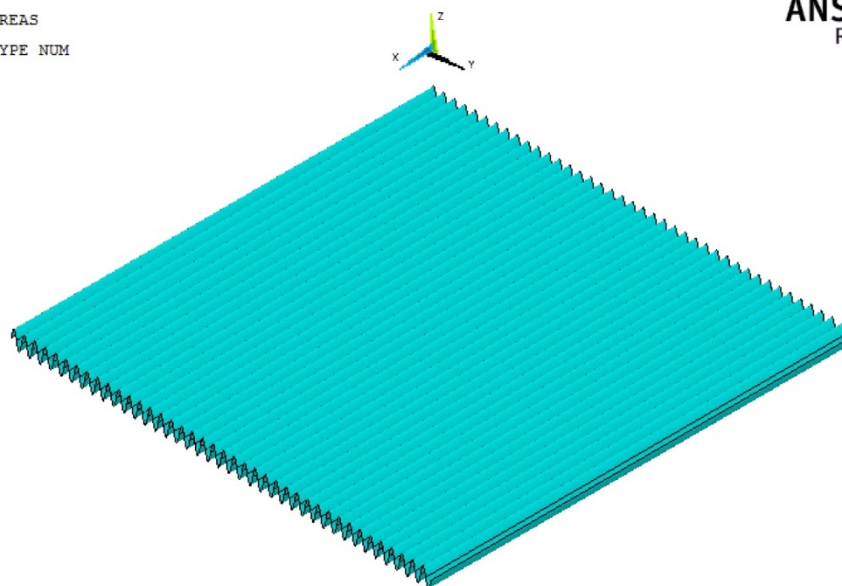


Figura 4-58 Placa ondulada para $n=40$

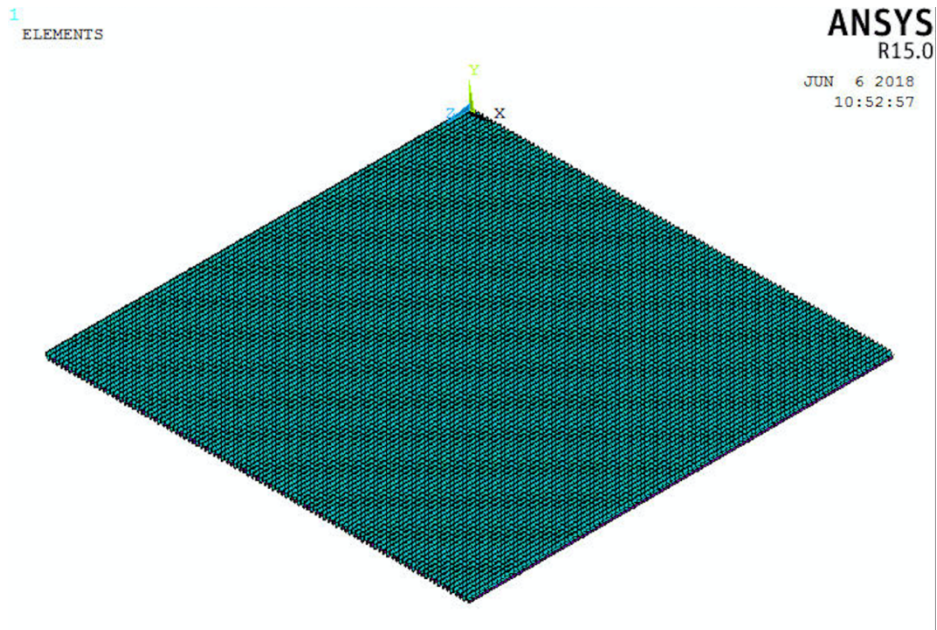


Figura 4-59 Placa ondulada para $n=100$

Se han representado diferentes números de ondulaciones para poder ilustrar con mayor claridad el modelo de elementos finitos construido ya que con una densidad de corrugas del modelo a estudio, $n=100$, el detalle de las ondas completas es difícil de apreciar.

En este punto del modelo es importante hacer hincapié en las normales del modelo. Debido a la subdivisión en áreas más pequeñas, todas las normales de todas las áreas deben ser consistentes e ir orientadas en la misma dirección para la aplicación correcta de las cargas posteriormente. En la Figura 4-60 se representan las áreas con todas las normales dispuestas. Se toma un número de ondas $n=10$ para su mejor visualización.

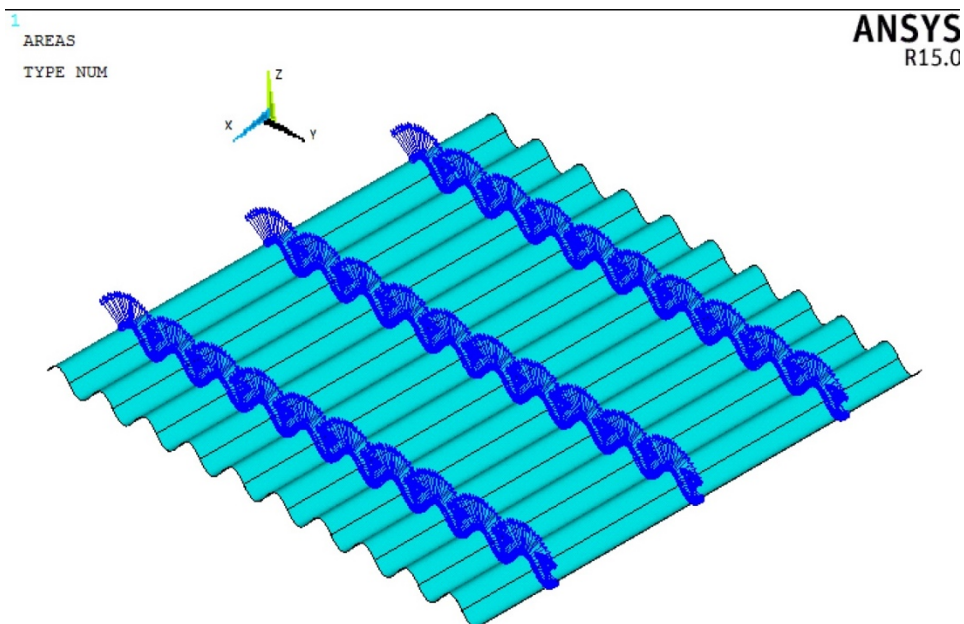


Figura 4-60 Normales sobre la placa ondulada

Tras la construcción de la geometría completa del modelo se selecciona el tipo de elemento para la placa. Como en ocasiones anteriores, el elemento elegido es el SHELL181, óptimo para el estudio de las placas delgadas y que aporta unos resultados satisfactorios. Junto con la definición de los elementos se modelan los materiales según lo recogido en la Tabla 4-28. Con ello, se comienza el mallado de la estructura.

Conviene remarcar que el tamaño de malla variará en función del número de corrugas del que disponga la placa. A mayor densidad de ondas en la placa, el tamaño de la malla debe ser, proporcionalmente, más pequeño para que el modelo aporte buenas soluciones.

La placa se encuentra simplemente apoyada en todos sus bordes y sometida a una carga constante en toda su superficie de 1000 kn/m^2 . La carga y las condiciones de contorno aquí expuestas serán las mismas para todos los casos estudiados dentro de este apartado indistintamente del número de ondas estudiado. En la Figura 4-61 se representa el modelo completo con todas las condiciones de contorno aplicadas.

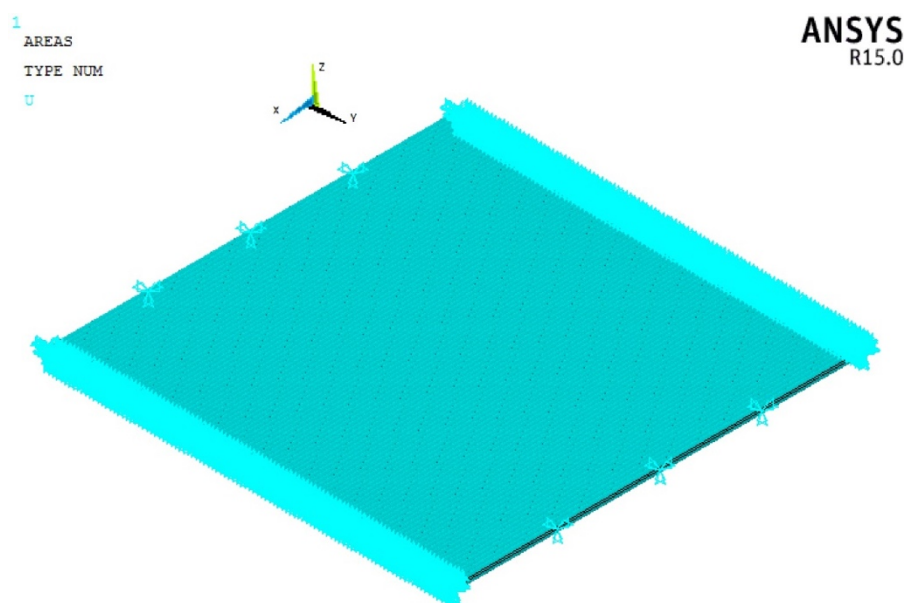


Figura 4-61 Condiciones de contorno placa ondulada $n=100$.

Los resultados obtenidos con el modelo numérico se recogen en la Tabla 4-29.

Tabla 4-29 Convergencia de la malla de la placa ondulada.

Tamaño del elemento	Flecha (m)
0.1	0.008675
0.08	0.008683
0.05	0.00675
0.04	0.006673

Notar que es necesario un equilibrio entre el tamaño de la malla, la cual va aportando cada vez resultados más exacto a nuestro modelo, y un compromiso con el coste computacional que lleva asociado. En ciertos modelos, dicho coste computacional es inasumible y es necesario un equilibrio entre el resultado y el coste computacional asociado. En la Figura 4-62 se muestra la deformación obtenida:

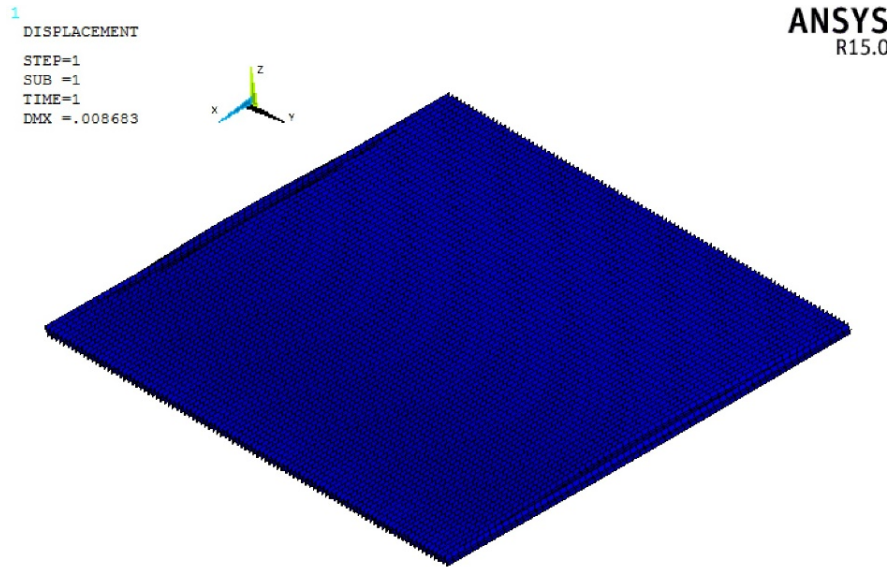


Figura 4-62 Deformación del modelo de placa ondulada.

La deformación que se obtiene es coherente con lo estudiado en la teoría. Debido a la gran densidad de ondulaciones que están presentes en la placa es difícil apreciar que la deformación. Sin embargo, ésta se produce en los puntos centrales de la placa.

Para resolver el problema y comparar los valores obtenidos se implementa el código de placa ortótropa en MATLAB. Dichas ecuaciones incluirán una serie de rigideces equivalentes obtenidas de la literatura que transforman la placa ondulada en una placa ortotrópicamente equivalente.

Como en los casos anteriores, se realizan una serie de iteraciones que va resolviendo la ecuación con las rigideces, condiciones de carga y contorno y geometría incluidos. Los resultados obtenidos del modelo analítico se presentan en la Figura 4-63:

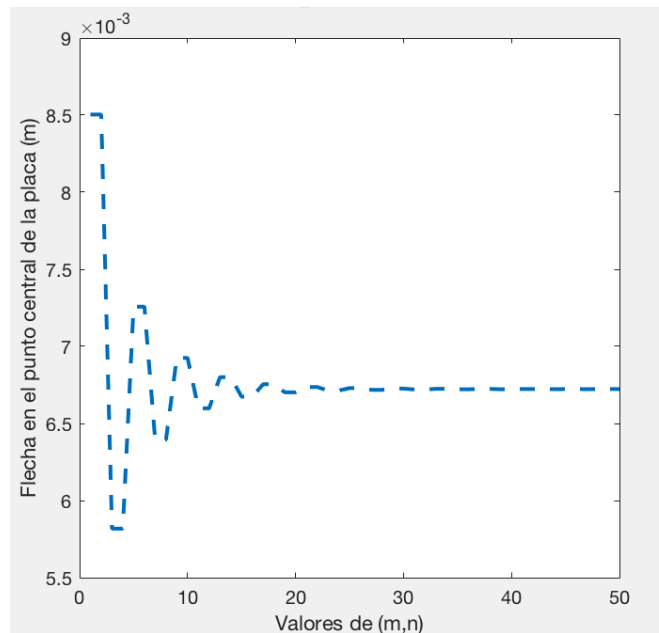


Figura 4-63 Resolución analítica de la placa ondulada para $n=100$.

Notar que el modelo analítico tarda más en converger que sus predecesores los cuales convergían cercanos a la 5 iteración. En este modelo, dada las rigideces equivalentes, es necesario realizar una serie de iteraciones más. En la Tabla 4-30 se recogen los valores obtenidos por ambos métodos:

Tabla 4-30 Soluciones obtenidas con el modelo de placa ondulada

	Modelo analítico	Modelo MEF	Error (%)
Flecha en el punto central de la placa (m)	0.0067	0.006673	0.40%

El error cometido entre ambos modelos se calcula usando la fórmula (3.1). Como se puede observar, el error cometido es insignificante siendo éste un valor por debajo del 1%. Con ello, podemos concluir que el modelo numérico creado aporta soluciones consistentes con el modelo analítico analizado y es un modelo aceptable.

Es importante notar de nuevo el compromiso entre el tamaño de la malla, los resultados obtenidos y el coste computacional que se deriva de cada uno de ellos. En las Figuras 4-64, 4-65, 4-66 y 4-67, se comparan los mapas de deformaciones obtenidos bajo los modelos analizados.

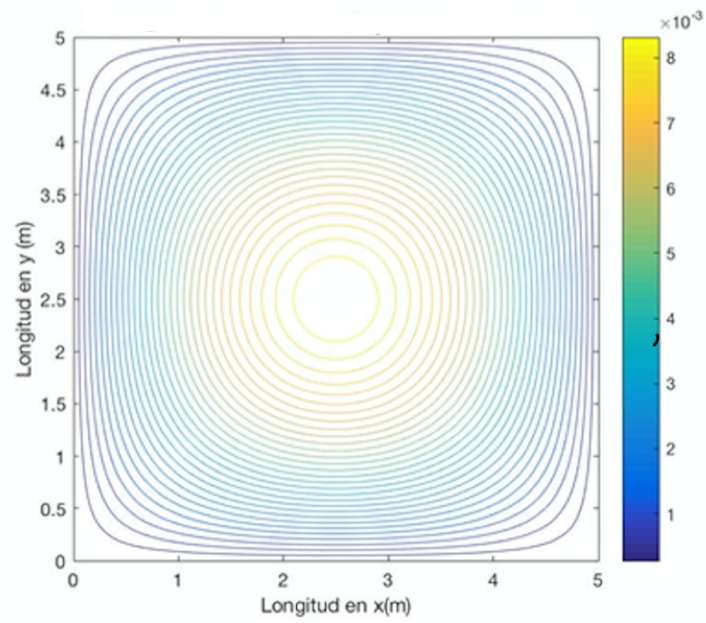


Figura 4-64 Soluciones del modelo analítico de la placa ondulada.

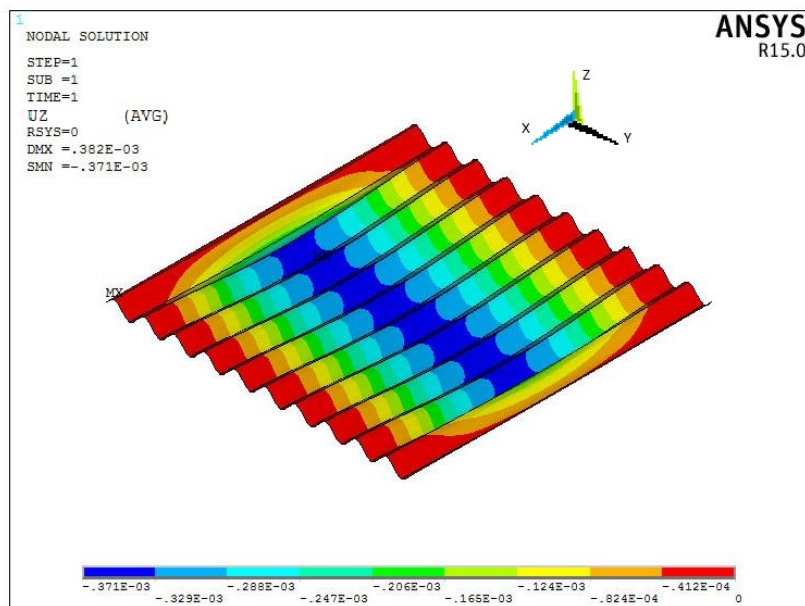


Figura 4-65 Soluciones del modelo numérico de la placa ondulada $n=10$

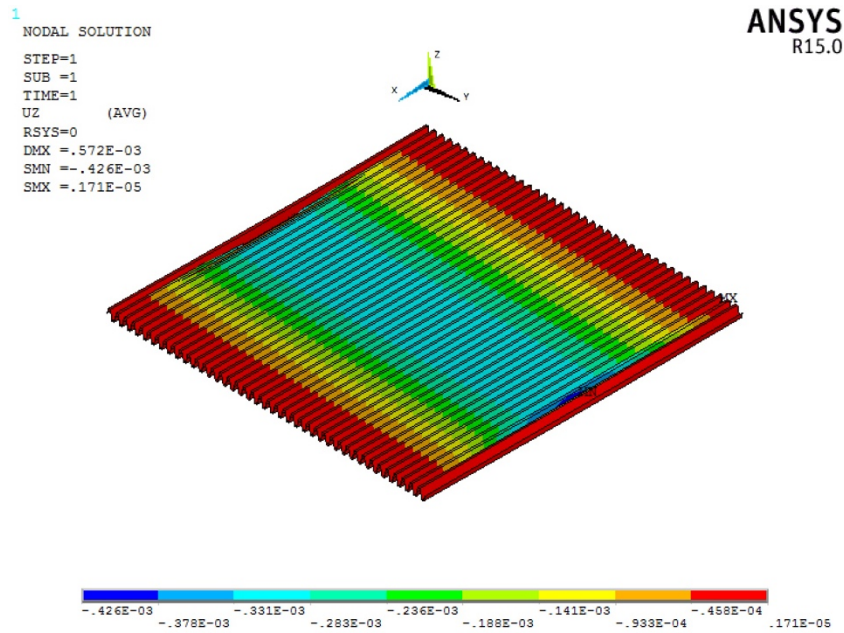


Figura 4-66 Soluciones del modelo numérico de la placa ondulada n=40

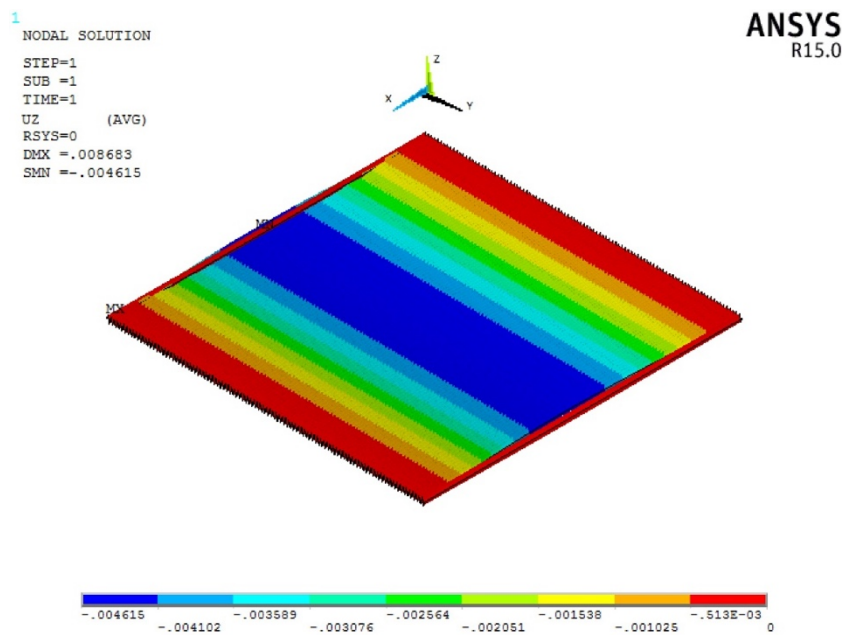


Figura 4-67 Soluciones del modelo numérico de la placa ondulada n=100

Se aprecia la similitud de ambas deformaciones obtenidas. La deformación es máxima en los puntos centrales de la placa y en el entorno de la misma. A partir de esos puntos, va disminuyendo de forma concéntrica a ese punto como se puede apreciar en las dos representaciones. Asimismo, se cumplen las condiciones de contorno impuestas en todo el contorno de la placa.

Recordar que la tendencia se observa mucho más claramente en el modelo analítico debido a que el uso de las rigideces equivalentes transforma la placa en una placa ortotrópicamente equivalente eliminando las ondulaciones. Si se reduce el número de ondulaciones, el patrón de soluciones se observa mucho mejor siendo éste muy similar al obtenido con la solución analítica.

4.6.1. Estudio de la densidad de ondulaciones.

En este apartado se estudiará como es la influencia de la densidad de las ondulaciones en una placa de dimensiones similares a la estudiada anteriormente y cómo evoluciona su flecha máxima.

Para ello, se comenzará estudiando una placa de dimensiones similares a la anterior y se irá aumentando el número de ondulaciones totales dispuestas en la placa. Para cada número de ondulación establecido, se calculará la flecha usando los modelos analíticos y numéricos anteriormente expuestos.

Las dimensiones de la placa, así como las amplitudes de las ondulaciones se mantienen constantes, lo único que variará será la longitud de onda de las corrugas. Conforme se aumenten las ondulaciones, el tamaño de la malla aumentará, pero manteniendo un compromiso entre la solución que se busca para resolver el problema a estudio y el coste computacional asociado, algunas veces insalvable dado el modelo a analizar.

Como el código de APDL del modelo numérico se parametrizó en función de la longitud de onda, entre otros valores, la construcción de los diferentes modelos de placa ondulada es inmediata. En las Figuras 4-57,4-58,4-59 se ilustraron diferentes placas con diferente número de ondulaciones. En la Tabla 4-31 se recogen las deformaciones obtenidas con el modelo numérico:

Tabla 4-31 Resultados modelo modificado el número de ondulaciones.

Número de ondulaciones	Flecha modelo numérico (m)	Flecha modelo analítico (m)	Errores (%)
70	0.006918	0.0081	14.49
100	0.006673	0.0067	0.40
130	0.00659	0.0061	6.76
150	0.006523	0.0059	9.55
200	0.006498	0.0056	13.819

Gráficamente:

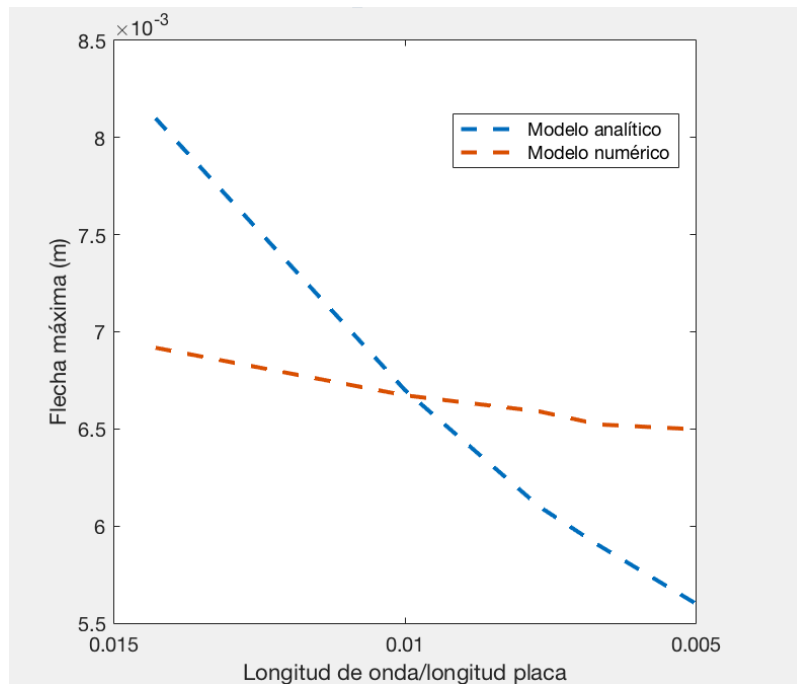


Figura 4-68 Análisis de la densidad de ondulaciones en una placa 5x5m.

Como se puede apreciar, el modelo numérico y el modelo analítico presentan valores similares en un determinado rango de ondulaciones, concretamente alrededor de 100 ondulaciones. A partir de ese punto, los resultados empiezan a converger cuando nos alejamos de dicho punto. Sin embargo, los valores y los errores que se obtienen para ondulaciones muy alejadas del punto de convergencia no resultan muy altos y pueden considerarse unos valores aceptables. Se observa que cuando la longitud de la onda es del orden de magnitud de la amplitud de la ondulación, el modelo analítico y el modelo numérico presentan un acuerdo óptimo.

Notar que la evolución del modelo numérico es mucho más suave que la del modelo analítico. Esto puede deberse a que según se aumenta el número de ondulaciones, el modelo cada vez se encuentra más saturado y es más difícil de obtener unos valores aceptables. Además, dada la densidad de las ondulaciones que presenta el modelo, los costes computacionales asociados a la misma son cada vez más altos para un mismo tamaño de malla. Es necesario adoptar un compromiso entre ir refinando el tamaño de la malla y obtener unos valores que sean aceptables para el estudio del modelo.

Para confirmar esta tendencia, se ha estudiado la densidad de las ondulaciones en una placa del mismo espesor, pero con dimensiones 10x10. El resultado del estudio se muestra en la figura 4-69:

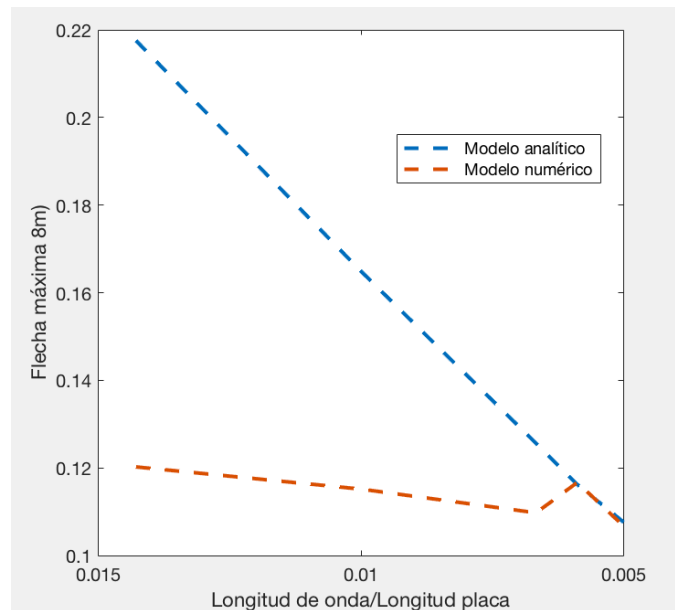


Figura 4-69 Análisis de la densidad de ondulaciones en una placa de 10x10m

Como se observa en la Figura 4-69, la tendencia se mantiene, el modelo numérico y el modelo analítico van convergiendo para un determinado rango de ondulaciones de la placa. En este caso, con una placa donde las dimensiones se han doblado, el número de ondulaciones óptimo también se ha doblado. Para valores muy alejados de este punto se observa una diferencia entre los valores que se va aproximando con el aumento de la densidad de ondas.

De nuevo, el modelo numérico evoluciona de forma mucho más suave que el modelo analítico estudiado. Esto es debido a la gran cantidad de ondulaciones presentes en el modelo que provocan que éste se sature y su evolución sea más suave. De igual forma, según la longitud de onda se acerca a órdenes de magnitud de la amplitud de la ondulación, existe un acuerdo entre ambas soluciones.

Se concluye que existe un rango de valores donde el modelo analítico y el modelo numérico presentan resultados similares. Este rango de valores está supeditado al tamaño de la placa, cuanto mayor sea el tamaño de la misma, mayores serán el número de las ondulaciones donde se da este óptimo. Fuera de dicho rango, el modelo va convergiendo hacia unos valores que podemos considerar aceptables dado el modelo construido. A posteriori, los modelos van divergiendo cada vez más debido a la saturación que presenta el modelo numérico construido y al coste computacional asociado al mismo.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

5.1. Resumen y conclusiones

En el presente proyecto se han recopilado una serie de modelos analíticos que permiten estudiar el problema de flexión para diferentes configuraciones de placa ortótropa. Estos modelos se han implementado en MATLAB y se han comparado con el Método de los Elementos Finitos (MEF).

Se comenzó estudiando el caso de placa isótropa y los valores de la bibliografía para validar la implantación en MATLAB. Se han estudiado 4 tipología diferentes de placas: placa de grafito-epoxy, placa con rigidizadores en una dirección, placa con rigidizadores en las dos direcciones y placa ondulada. Para cada uno de ellos, se ha desarrollado un modelo analítico y numérico que resuelve el problema de flexión y proporciona el valor de la flecha máxima de la placa. En base a todos estos resultados se puede concluir lo siguiente:

1. Los modelos asociados a la placa de material compuesto como la placa con rigidizadores en una dirección presentan buenas aproximaciones con el uso del modelo analítico con las rigideces equivalente y con su construcción en Elementos Finitos a través de las propiedades. Se puede concluir que las rigideces obtenidas en la bibliografía representan una buena aproximación del comportamiento estructural de la placa.
2. En el caso de la placa con rigidizadores en dos direcciones existe un acuerdo de la solución obtenida a través del modelo numérico y el modelo analítico. Fuera de ese rango, el modelo numérico no posee los suficientes elementos como para seguir al modelo analítico construido.
3. En el caso de la placa ondulada se observa un buen acuerdo para las soluciones numéricas y analítica cuando la longitud de onda es del orden de magnitud de la amplitud de la ondulación. Fuera de ese rango, el modelo numérico y el modelo analítico comienzan a divergir.

5.2. Trabajos futuros.

Se proponen diferentes alternativas para ser estudiadas en trabajos futuros:

1. Estudio del comportamiento a pandeo de los elementos tipo placa implementando subrutinas de MATLAB para resolver el problema de manera analítica y su comparación con los valores obtenidos de manera numérica a través del Método de los Elementos Finitos (MEF)

2. Estudio de las vibraciones a través de la comparación de los valores obtenidos de manera analítica mediante el desarrollo de códigos en MATLAB y la construcción de un modelo de elementos finitos (MEF)
3. Análisis de las ventajas e inconvenientes de la utilización de diferentes elementos en el modelo de Elementos Finitos para el estudio de placas sometida a flexión

6. REFERENCIAS

- [1] ANSYS, 21 06 2018 [En línea]. Available: <https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/>. [Último acceso: 21 06 2018]
- [2] Kollár.P.L. Springer.S.G.(2003). *Mechanics of Composite Structure*.Cambridge.
- [3] Ugural. A.C. (1981) *Stresses in Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company.
- [4] Donnell, L.H. (1976). *Beams, Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, New York
- [5] Oñate Ibañez de Navarra, E.(2016). Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos: análisis elástico lineal. *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*.
- [6] Rodríguez-Tembleque Solano, Luis. Abascal García, R. (2016).Apuntes de placa y láminas.Universidad de Sevilla. Escuela Técnica Superior de Ingeniería. *Sección de Publicaciones ETSI*.

7. ANEXO I

7.1. Código de MATLAB para placa isótropa.

```
%%CÁLCULO DEL CAMPO DE FLECHA EN UNA PLACA RECTANGULAR ISOTROPA%%

%Propiedades del material

E=2.1e11; %(Pa)
h=0.01; %(m)
tau=0.3;

%Rigidez%
D=(E*h^3)/(12*(1-tau^2));

%Geometría de la placa y cargas%%
po=1000; %(N/m2)
a=0.5; %(m)
b=0.5; %(m)

%Puntos donde se evalúa la expresión%%
x=a/2;
y=b/2;

%Doble sumatorio implementado con doble bucle for

flecha=0;
j=[];

for m=1:15

    for n=1:15

        flecha=flecha+(16*po/(D*pi.^6))*(sin((m.*pi*x)/a)*sin((n.*pi*y)/b))/(m*n*((m./a).^2+(n./b).^2).^2);

    j(m)=flecha;

    end

end
```

%Representaci3n de la convergencia de los primeros 15 t3rminos de la soluci3n

z=1:15;

plot (z,j)

Axis ('square')

7.2. C3digo de MATLAB para placa de material compuesto.

%%C3LCULO DE LA FLECHA DE UNA PLACA RECTANGULAR ORTOTROPA%%

clear all

clc

%Propiedades del material

D11=32.61;

D12=4.58;

D22=12.34;

D66=5.14;

%Geometr3a de la placa y cargas%%

po=50000; %(N/m2)

a=0.2; %(m)

b=0.2; %(m)

%Puntos donde se eval3a la expresi3n%%

x=a/2;

y=b/2;

%Doble sumatorio implementado con doble bucle for

flecha=0;

j=[];

for m=1:15

for n=1:15

flecha=flecha+(((16*po)/pi^6)*(sin((m*pi*x)/a)*sin((n*pi*y)/b))/(m*n*(D11*(m^4/a^4)+(2*(D12+2*D66)*((m^2*n^2)/(a^2*b^2)))+(D22*(n^4/b^4)))));

j(m)=flecha;

end

end

%Representaci3n de la convergencia de los primeros 15 t3rminos de la soluci3n

```

z=1:15;

plot (z,j)

axis ('square')

```

7.3. Código de MATLAB para placa con rigidizadores en una dirección

```

%%CÁLCULO DE LA FLECHA DE UNA PLACA RECTANGULAR CON RIGIDIZADORES EN
UNA DIRECCIÓN%
clc

%Propiedades del material
E=2.1e11; %(Pa)
tau=0.3;
h=0.01;%(m) %Espesor de la placa

H1=0.120;
t1=0.50;
b1=0.080;

%Rigidez%
Dx=(E*h^3)/(12*(1-tau^2))+((E*b1*(H1^3-h^3))/(12*t1));
Dy=(E*h^3)/(12*(1-tau^2));
H=(E*h^3)/(12*(1-tau^2));

%Geometría de la placa y cargas%%

po=1000; %(N/m2)
a=2.5; %(m)
b=2.5; %(m)

%Puntos donde se evalúa la expresión%%
x=a/2;
y=b/2;

%Doble sumatorio implementado con doble bucle for
flecha=0;
j=[];

for m=1:15

    for n=1:15

```

```

flecha=flecha+(((16*po)/pi^6)*(sin((m*pi*x)/a)*sin((n*pi*y)/b))/(m*n*(Dx*(m^4/a^
4)+(2*H*((m^2*n^2)/(a^2*b^2)))+(Dy*(n^4/b^4)))));

j(m)=flecha;

end
end

```

7.4. Código de MATLAB para placa con rigidizadores en dos direcciones.

```

%%C?LCULO DEL CAMPO DE DEFORMACIONES DE UNA PLACA RECTANGULAR ORTOTROPA%%

clear all

clc

%Propiedades del material

E=2.1e11; %(Pa)

tau=0.3;

h=0.01;%(m) %Espesor de la placa

H1=0.120;

t1=2.5/5;

b1=0.080;

b2=0.080;

H2=0.120;

t2=2.5/5;

%Rigidez%

Dx=(E*h^3)/(12*(1-tau^2))+((E*b1*(H1^3-h^3))/(12*t1));

Dy=(E*h^3)/(12*(1-tau^2))+((E*b2*(H2^3-h^3))/(12*t2));

H=(E*h^3)/(12*(1-tau^2));

%Geometr?a de la placa y cargas%%

po=1000; %(N/m2)

a=2.5; %(m)

b=2.5; %(m)

```

```
%Puntos donde se eval?a la expresi?n%%
```

```
x=a/2;
```

```
y=b/2;
```

```
%Doble sumatorio implementado con doble bucle for
```

```
flecha=0;
```

```
j=[];
```

```
for m=1:15
```

```
    for n=1:15
```

```
        flecha=flecha+(((16*po)/pi^6)*(sin((m*pi*x)/a)*sin((n*pi*y)/b))/(m*n*(Dx*(m^4/a^4)+(2*H*((m^2*n^2)/(a^2*b^2)))+(Dy*(n^4/b^4)))));
```

```
    j(m)=flecha;
```

```
    end
```

```
end
```

7.5. Código de MATLAB para placa ondulada.

```
%%C?LCULO DEL CAMPO DE DEFORMACIONES DE UNA PLACA RECTANGULAR ORTOTROPA%%  
clear all  
clc  
%Propiedades del material  
E=2.1e11; %(Pa)  
tau=0.3;  
t=0.003;%(m) %Espesor de la placa  
L=5; %Dimensiones de la placa  
altura=0.05; %(m) %altura de la semionda  
n=100; %%numero de ondas completas  
s=L/(2*n);  
I=altura^2*t*(1-((0.81)/(1+(2.5*(altura/(2*s))^2))));  
lamda=s*(1+((pi^2*altura^2)/(4*s^2)));  
%Rigidez%  
Dy=(E*I);  
Dx=(s*E*t^3)/(lamda*12*(1-tau^2));  
H=(lamda*E*t^3)/(s*12*(1+tau));  
  
%Geometr?a de la placa y cargas%%  
  
po=1000; %(N/m2)
```

```

%Puntos donde se eval?a la expresi?n%%
x=L/2;
y=L/2;
%Doble sumatorio implementado con doble bucle for
flecha=0;
j=[];

for m=1:50

    for n=1:50

        flecha=flecha+(((16*po)/pi^6)*(sin((m*pi*x)/L)*sin((n*pi*y)/L))/(m*n*(Dx*(m^4/L^4)+(2*H*((
m^2*n^2)/(L^2*L^2)))+(Dy*(n^4/L^4))))));

        j(m)=flecha;

    end

end
end

```

8. ANEXO II

8.1. Código para la placa isótropa.

/PREP7

!0.-Datos de partida y materiales

```
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,2.1e11      ![GPa]
MPDATA,PRXY,1,,0.3
```

!1.-Elementos

```
ET,1,SHELL181
```

!2.-Sección

```
sect,1,shell,,PlacaISO
secdata, 0.01,1,0.0,3
secoffset,MID
seccontrol,,,, , , ,
```

!4.- Geometría del elemento

!4.1.- KeyPoints

```
k,1,0,0,0,
k,2, 0.5,0,0.5,
k,3, 0,0,0.5,
k,4, 0.5,0,0,
```

!4.2.-Líneas

```
LSTR, 1, 3
LSTR, 3, 2
LSTR, 2, 4
LSTR, 4, 1
```

!4.3.-Áreas

AL,1,2,3,4

!5.-Mallado

ESIZE,0.01,0,

amesh,all

!6.-Aplicación de las condiciones de contorno

LSEL,ALL

DL, ALL, ,ux ,0

DL, ALL, ,uy ,0

DL, ALL, ,uz ,0

!7.-Aplicación de la carga.

SFA,ALL,1,PRES,-1000

/SOL

/STATUS,SOLU

SOLVE

FINISH

8.2. Código para la placa de material compuesto.

8.2.1. Código empleando las propiedades de los materiales

/FINISH

/CLEAR

/PREP7

!1.-ELEMENTOS

ET,1,SHELL181

!2.-PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

MPTEMP,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,1,,148e9

MPDATA,EY,1,,9.65e9

MPDATA,EZ,1,,9.65e9

MPDATA,PRXY,1,,0.3

MPDATA,PRYZ,1,,0.6

MPDATA,PRXZ,1,,0.3

MPDATA,GXY,1,,4.55e9

MPDATA,GYZ,1,,4.55e9

MPDATA,GXZ,1,,4.55e9

!3.-GEOMETRÍA

!3.1.-KEYPOINT

k,1,0,0,0

k,2,0.2,0,0

k,3,0.2,0,0.2

k,4,0,0,0.2

!3.2.-LÍNEAS

lstr,1,2

lstr,2,3

lstr,3,4

lstr,4,1

!3.3.-ÁREAS

AL,4,1,2,3

!4.-SECCIONES

sect,1,shell,,Laminado

secdata, 0.001,1,0.0,3

secdata, 0.0001,1,0.0,3

secdata, 0.0001,1,45,3

secdata, 0.0001,1,45,3

secdata, 0.0001,1,90,3

secdata, 0.0001,1,90,3

secdata, 0.0001,1,-45,3

secdata, 0.0001,1,-45,3

secoffset,MID

seccontrol,,,, , , ,

!4.-ASIGNACIÓN DE ATRIBUTOS

CM,_Y,AREA

ASEL, , , , 1

CM,_Y1,AREA

CMSEL,S,_Y

!*

CMSEL,S,_Y1

AATT, 1, , 1, 0, 1

CMSEL,S,_Y

CMDELE,_Y
 CMDELE,_Y1
 !*
 !5.-MALLADO
 aesize, all, 0.01
 amesh, all

 !6.-CONDICIONES DE CONTORNO
 LSEL,S,,,ALL
 DL,ALL,,UX,0

DL,ALL,,UY,0
 DL,ALL,,UZ,0
 !7.-CONDICIONES EN CARGA.
 SFA,all,1,PRES,50000
 !8.-SOLUCIÓN.
 /SOL
 /STATUS,SOLU
 SOLVE

8.1.2. Código empleando las rigideces

FINISH
 /CLEAR
 /PREP7
 !1.-Elementos
 ET,1, SHELL181
 !2.-Secciones
 SECT,1, GENS,,
 !2.1.-Matrices de rigidez del elemento
 SSPA,99.95e6,31.57e6,0,99.95e6,0,34.19e6
 SSPB,0,0,0,0,0,0
 SSPD,34.61,4.56,3.34,12.34,3.34,5.14
 SSPE,407812.8,0,407964.7
 SSMT,,,
 SSBT,,,
 SSPM,
 !3.-Geometría
 !3.1.-KeyPoints
 k,1,0,0,0
 k,2,0.2,0,0

k,3,0.2,0,0.2
 k,4,0,0,0.2
 !3.2.-Líneas
 lstr,1,2
 lstr,2,3
 lstr,3,4
 lstr,4,1
 !3.3.-Áreas
 AL,4,1,2,3
 !4.-Mallado del elemento

 aesize, all, 0.01
 amesh, all

 !5.-Aplicación de las condiciones de contorno
 LSEL,S,,,ALL
 DL,ALL,,UX,0
 DL,ALL,,UY,0
 DL,ALL,,UZ,0

!6.-Aplicación de la carga	/STATUS,SOLU
SFA,all,1,PRES,50000	SOLVE
/SOL	

8.2. Código para la placa con rigidizadores en una dirección.

/FINISH	!3.1.1KeyPoints de referencia
/CLEAR	k,13,0,-0.2,0.5
/PREP7	k,14,0,-0.2,1
!1.-Elementos	k,15,0,-0.2,1.5
ET,1,SHELL181	k,16,0,-0.2,2
ET,2,BEAM188	!3.2...-Líneas
!2.-Propiedades de los materiales	lstr,1,4
MPTEMP,,,,,,,,	lstr,4,5
MPTEMP,1,0	lstr,5,9
MPDATA,EX,1,,2.1e11	lstr,9,1
MPDATA,PRXY,1,,0.3	lstr,9,10
	lstr,10,6
!3.-Geometría	lstr,6,5
!3.1-KeyPoints	lstr,6,7
k,1,0,0,0,	lstr,7,11
k,2, 2.5,0,2.5,	lstr,11,10
k,3, 0,0,2.5,	lstr,11,12
k,4, 2.5,0,0,	lstr,12,8
k,5, 2.5,0,0.5	lstr,8,7
k,6,2.5,0,1	lstr,8,2
k,7,2.5,0,1.5	lstr,2,3
k,8,2.5,0,2	lstr,3,12
k,9,0,0,0.5	!3.3.-Áreas
k,10,0,0,1	AL,1,4,3,2
k,11,0,0,1.5	AL,5,3,6,7
k,12,0,0,2	AL,10,6,9,8

AL,11,9,12,13

AL,16,12,15,14

!3.3.1.-Colocación de todas las normales en la misma dirección

ANORM,1,0

!4.-Secciones

!4.1.-Sección de los rigidizadores

SECTYPE, 1, BEAM, RECT, Rigidiza, 0

SECOFFSET, CENT

SECDATA,0.080,0.120,0,0,0.0052,0.0038,
0,0,0,0,0,0

!4.2.Sección de la placa

sect,2,shell,,Placa

secdata, 0.01,1,0.0,3

secoffset,MID

seccontrol,,,, , , ,

!5.-Atributos de las líneas y áreas

CM,_Y,LINE

LSEL, , , , 3

CM,_Y1,LINE

CMSEL,S,_Y

!*

!*

CMSEL,S,_Y1

LATT,1, ,2, , 13, ,1

CMSEL,S,_Y

CMDELE,_Y

CMDELE,_Y1

!*

CM,_Y,LINE

LSEL, , , , 6

CM,_Y1,LINE

CMSEL,S,_Y

!*

!*

CMSEL,S,_Y1

LATT,1, ,2, , 14, ,1

CMSEL,S,_Y

CMDELE,_Y

CMDELE,_Y1

!*

CM,_Y,LINE

LSEL, , , , 9

CM,_Y1,LINE

CMSEL,S,_Y

!*

!*

CMSEL,S,_Y1

LATT,1, ,2, , 15, ,1

CMSEL,S,_Y

CMDELE,_Y

CMDELE,_Y1

!*

CM,_Y,LINE

LSEL, , , , 12

CM,_Y1,LINE

CMSEL,S,_Y

!*

!*

CMSEL,S,_Y1

LATT,1,,2,,16,,1	LSEL,S,,,13
CMSEL,S,_Y	DL,ALL,,UX,0
CMDELE,_Y	DL,ALL,,UY,0
CMDELE,_Y1	DL,ALL,,UZ,0
!* AATT,1,,1,0,2	LSEL,S,,,14 DL,ALL,,UX,0 DL,ALL,,UY,0 DL,ALL,,UZ,0
!6.-Mallado del Elemento	LSEL,S,,,15
lesize,all,0.05	DL,ALL,,UX,0
lmesh,3	DL,ALL,,UY,0
lmesh,6	DL,ALL,,UZ,0
lmesh,9	LSEL,S,,,16
lmesh,12	DL,ALL,,UX,0
aesize,all,0.05	DL,ALL,,UY,0
amesh, all	DL,ALL,,UZ,0
!7.-Aplicación de las condiciones de contorno	LSEL,S,,,11
LSEL,S,,,1	DL,ALL,,UX,0
DL,ALL,,UX,0	DL,ALL,,UY,0
DL,ALL,,UY,0	DL,ALL,,UZ,0
DL,ALL,,UZ,0	LSEL,S,,,10
LSEL,S,,,2	DL,ALL,,UX,0
DL,ALL,,UX,0	DL,ALL,,UY,0
DL,ALL,,UY,0	DL,ALL,,UZ,0
DL,ALL,,UZ,0	LSEL,S,,,4
LSEL,S,,,7	DL,ALL,,UX,0
DL,ALL,,UX,0	DL,ALL,,UY,0
DL,ALL,,UY,0	DL,ALL,,UZ,0
DL,ALL,,UZ,0	LSEL,S,,,5
LSEL,S,,,8	DL,ALL,,UX,0
DL,ALL,,UX,0	DL,ALL,,UY,0
DL,ALL,,UY,0	DL,ALL,,UZ,0
DL,ALL,,UZ,0	

!8.-Aplicación de las cargas.	/STATUS,SOLU
SFA,all,1,PRES,1000	SOLVE
/SOL	FINISH

8.3. Código para la placa con rigidizadores en dos direcciones

/PREP7	k,14,1,0,0	
!1.-Elementos	k,15,1.5,0,0	k,34,0.5,0,2
ET,1,SHELL181	k,16,2,0,0	k,35,1,0,2
ET,2,BEAM188		k,36,1.5,0,2
!2.-Propiedades de los materiales	k,17,0.5,0,2.5	
	k,18,1,0,2.5	
MPTEMP,,,,,,,,	k,19,1.5,0,2.5	
MPTEMP,1,0	k,20,2,0,2.5	k,37,0,-0.3,0.5
MPDATA,EX,1,,2.1e11		k,38,0,-0.3,1
MPDATA,PRXY,1,,0.3	k,21,0.5,0,0.5	k,39,0,-0.3,1.5
!3.-Geometría	k,22,1,0,0.5	k,40,0,-0.3,2
!3.1.-KeyPoints	k,23,1.5,0,0.5	
k,1,0,0,0,	k,24,2,0,0.5	k,41,0.5,-0.3,2
k,2, 2.5,0,2.5,		k,42,0.5,-0.3,1.5
k,3, 0,0,2.5,	k,25,0.5,0,1	k,43,0.5,-0.3,1
k,4, 2.5,0,0,	k,26,1,0,1	k,44,0.5,-0.3,0.5
k,5, 2.5,0,0.5	k,27,1.5,0,1	
k,6,2.5,0,1	k,28,2,0,2	k,45, 1,-0.3,2
k,7,2.5,0,1.5		k,46,1,-0.3,1.5
k,8,2.5,0,2	k,29,2,0,1	k,47, 1,-0.3,1
k,9,0,0,0.5	k,30,0.5,0,1.5	k,48,1,-0.3,0.5
k,10,0,0,1	k,31,1,0,1.5	
k,11,0,0,1.5	k,32,1.5,0,1.5	k,49,1.5,-0.3,2
k,12,0,0,2	k,33,2,0,1.5	k,50,1.5,-0.3,1.5
k,13,0.5,0,0		

k,51,1.5,-0.3,1	lstr,12,11	lstr,28,8
k,52,1.5,-0.3,0.5	lstr,11,10	
	lstr,10,9	lstr,17,34
k,53,2,-0.3,2	lstr,9,1	lstr,34,30
k,54,2,-0.3,1.5		lstr,30,25
k,55,2,-0.3,1	lstr,9,21	lstr,25,21
k,56,2,-0.3,0.5	lstr,21,22	lstr,21,13
!3.2.-Líneas	lstr,22,23	
lstr,1,13	lstr,23,24	lstr,18,35
lstr,13,14	lstr,24,5	lstr,35,31
lstr,14,15		lstr,31,26
lstr,15,16	lstr,10,25	lstr,26,22
lstr,16,4	lstr,25,26	lstr,22,14
	lstr,26,27	
lstr, 4,5	lstr,27,29	lstr,19,36
lstr,5,6	lstr,29,6	lstr,36,32
lstr,7,6		lstr,32,27
lstr,7,8	lstr,11,30	lstr,27,23,
lstr,8,2	lstr,30,31	lstr,23,15
	lstr,31,32,	
lstr,2,20	lstr,32,33	lstr,20,28
lstr,20,19	lstr,33,7	lstr,28,33
lstr,19,18		lstr,33,29
lstr,18,17	lstr,12,34	lstr,29,24
lstr,17,3	lstr,34,35,	lstr,24,16
	lstr,35,36	
lstr,3,12	lstr,36,28	
!3.3.-Áreas	AL,56,11,40,10	AL,57,40,35,9
AL,15,16,36,41	AL,17,36,31,42	AL,31,18,26,43
AL,41,14,37,46	AL,42,37,32,47	AL,43,32,27,48
AL,46,13,51,38	AL,47,38,33,52	AL,48,33,28,53
AL,51,12,39,56	AL,52,39,34,57	AL,53,34,29,58

AL,58,35,30,8	!* CM,_Y,LINE	
AL,30,7,59,25	!* LSEL, , , , 44	
AL,29,59,54,24	CMSEL,S,_Y1 CM,_Y1,LINE	
AL,28,54,23,49	LATT,1, ,2, , 41, ,1 CMSEL,S,_Y	
AL,27,44,49,22	CMSEL,S,_Y !* CMDELE,_Y !* CMSEL,S,_Y1	
AL,44,26,21,19	CMDELE,_Y1	
AL,21,45,20,1	!* LATT,1, ,2, , 44, ,1	
AL,45,22,50,2	CM,_Y,LINE CMSEL,S,_Y	
AL,50,23,3,55	LSEL, , , , 42 CMDELE,_Y	
AL,55,24,4,60	CM,_Y1,LINE CMDELE,_Y1	
AL,60,25,6,5	CMSEL,S,_Y !* CM,_Y,LINE !* LSEL, , , , 45	
ANORM,1,0	CMSEL,S,_Y1 CM,_Y1,LINE	
!4.-Secciones	LATT,1, ,2, , 42, ,1 CMSEL,S,_Y !* CMDELE,_Y !* CMSEL,S,_Y1	
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, Rigidiza, 0	CMDELE,_Y1 !* LATT,1, ,2, , 44, ,1	
SECOFFSET, CENT	CM,_Y,LINE CMSEL,S,_Y	
SECDATA,0.080,0.120,0, 0,0.0052,0.0038,0,0,0,0,0, 0	CMDELE,_Y CMDELE,_Y1 CMSEL,S,_Y1	
sect,2,shell,,Placa	CMDELE,_Y CMDELE,_Y1	
secdata, 0.01,1,0.0,3	CM,_Y1,LINE	
secoffset,MID	CMSEL,S,_Y	
seccontrol,,,, , , ,	!* CM,_Y,LINE !* LSEL, , , , 46	
!5.-Atributos de las líneas y áreas	CMSEL,S,_Y1 CM,_Y1,LINE	
	LATT,1, ,2, , 43, ,1 CMSEL,S,_Y !* CMDELE,_Y !* CMSEL,S,_Y1	
CM,_Y,LINE	CMDELE,_Y1	
LSEL, , , , 41	CMSEL,S,_Y1	
CM,_Y1,LINE	!* LATT,1, ,2, , 45, ,1	
CMSEL,S,_Y		

CMSEL,S,_Y	!*	CMSEL,S,_Y1
CMDELE,_Y	!*	LATT,1,,2,, 49,,1
CMDELE,_Y1	CMSEL,S,_Y1	CMSEL,S,_Y
!*	LATT,1,,2,, 48,,1	CMDELE,_Y
CM,_Y,LINE	CMSEL,S,_Y	CMDELE,_Y1
LSEL,,,, 47	CMDELE,_Y	!*
CM,_Y1,LINE	CMDELE,_Y1	CM,_Y,LINE
CMSEL,S,_Y	!*	LSEL,,,, 52
!*	CM,_Y,LINE	CM,_Y1,LINE
!*	LSEL,,,, 50	CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1	CM,_Y1,LINE	!*
LATT,1,,2,, 46,,1	CMSEL,S,_Y	!*
CMSEL,S,_Y	!*	CMSEL,S,_Y1
CMDELE,_Y	!*	LATT,1,,2,, 50,,1
CMDELE,_Y1	CM,_Y,LINE	CMSEL,S,_Y
!*	LSEL,,,, 50	CMDELE,_Y
CM,_Y,LINE	CM,_Y1,LINE	CMDELE,_Y1
LSEL,,,, 48	CMSEL,S,_Y	!*
CM,_Y1,LINE	!*	CM,_Y,LINE
CMSEL,S,_Y	!*	LSEL,,,, 53
!*	CMSEL,S,_Y1	CM,_Y1,LINE
!*	LATT,1,,2,, 48,,1	CMSEL,S,_Y
CMSEL,S,_Y1	CMSEL,S,_Y	!*
LATT,1,,2,, 47,,1	CMDELE,_Y	!*
CMSEL,S,_Y	CMDELE,_Y1	CMSEL,S,_Y1
CMDELE,_Y	!*	LATT,1,,2,, 51,,1
CMDELE,_Y1	CM,_Y,LINE	CMSEL,S,_Y
!*	LSEL,,,, 51	CMDELE,_Y
CM,_Y,LINE	CM,_Y1,LINE	CMDELE,_Y1
LSEL,,,, 49	CMSEL,S,_Y	!*
CM,_Y1,LINE	!*	CM,_Y,LINE
CMSEL,S,_Y	!*	LSEL,,,, 54

CM,_Y1,LINE	!* CMSEL,S,_Y	CM,_Y,LINE
CMSEL,S,_Y	!* CMSEL,S,_Y1	LSEL, , , , 59
!* CMSEL,S,_Y1	!* LATT,1, ,2, , 53, ,1	CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y1	CMSEL,S,_Y	CMSEL,S,_Y
LATT,1, ,2, , 52, ,1	CMDELE,_Y	!* CMSEL,S,_Y1
CMSEL,S,_Y	CMDELE,_Y1	!* LATT,1, ,2, , 56, ,1
CMDELE,_Y	!* CM,_Y,LINE	CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y1	LSEL, , , , 57	CMDELE,_Y
!* CM,_Y,LINE	CM,_Y1,LINE	CMDELE,_Y1
LSEL, , , , 55	CMSEL,S,_Y	!* CM,_Y,LINE
CM,_Y1,LINE	!* CMSEL,S,_Y1	LSEL, , , , 60
CMSEL,S,_Y	!* LATT,1, ,2, , 54, ,1	CM,_Y1,LINE
!* CM,_Y,LINE	CMSEL,S,_Y	CMSEL,S,_Y
LSEL, , , , 55	CMDELE,_Y	!* CMDELE,_Y
CM,_Y1,LINE	CMDELE,_Y1	CMSEL,S,_Y1
CMSEL,S,_Y	!* CM,_Y,LINE	LATT,1, ,2, , 56, ,1
!* CMSEL,S,_Y1	LSEL, , , , 58	CMSEL,S,_Y
LATT,1, ,2, , 52, ,1	CM,_Y1,LINE	CMDELE,_Y1
CMSEL,S,_Y	CMSEL,S,_Y	!* CM,_Y,LINE
CMDELE,_Y	!* CMSEL,S,_Y1	LSEL, , , , 36
CMDELE,_Y1	LATT,1, ,2, , 55, ,1	CM,_Y1,LINE
!* CM,_Y,LINE	CMSEL,S,_Y	CMSEL,S,_Y
LSEL, , , , 56	CMDELE,_Y	!* CMSEL,S,_Y1
CM,_Y1,LINE	CMDELE,_Y1	CMSEL,S,_Y1
CMSEL,S,_Y	!* CMSEL,S,_Y1	

LATT,1,,2,, 41,,1	CM,_Y1,LINE	!*
CMSEL,S,_Y	CMSEL,S,_Y	!*
CMDELE,_Y	!*	CMSEL,S,_Y1
CMDELE,_Y1	!*	LATT,1,,2,, 54,,1
!*	CMSEL,S,_Y1	CMSEL,S,_Y
CM,_Y,LINE	LATT,1,,2,, 46,,1	CMDELE,_Y
LSEL,,,, 37	CMSEL,S,_Y	CMDELE,_Y1
CM,_Y1,LINE	CMDELE,_Y	!*
CMSEL,S,_Y	CMDELE,_Y1	CM,_Y,LINE
!*	!*	LSEL,,,, 35
!*	CM,_Y,LINE	CM,_Y1,LINE
CMSEL,S,_Y1	LSEL,,,, 33	CMSEL,S,_Y
LATT,1,,2,, 45,,1	CM,_Y1,LINE	!*
CMSEL,S,_Y	CMSEL,S,_Y	!*
CMDELE,_Y	!*	CMSEL,S,_Y1
CMDELE,_Y1	!*	LATT,1,,2,, 54,,1
!*	CM,_Y,LINE	CMSEL,S,_Y
	LSEL,,,, 33	CMDELE,_Y
CM,_Y,LINE	CM,_Y1,LINE	CMDELE,_Y1
LSEL,,,, 31	CMSEL,S,_Y	CM,_Y,LINE
CM,_Y1,LINE	!*	LSEL,,,, 38
CMSEL,S,_Y	!*	CM,_Y1,LINE
!*	CMSEL,S,_Y1	CMSEL,S,_Y
!*	LATT,1,,2,, 50,,1	!*
CMSEL,S,_Y1	CMSEL,S,_Y	!*
LATT,1,,2,, 42,,1	CMDELE,_Y	CMSEL,S,_Y1
CMSEL,S,_Y	CMDELE,_Y1	LATT,1,,2,, 49,,1
CMDELE,_Y	!*	CMSEL,S,_Y
CMDELE,_Y1	CM,_Y,LINE	CMDELE,_Y
!*	LSEL,,,, 34	CMDELE,_Y1
CM,_Y,LINE	CM,_Y1,LINE	!*
LSEL,,,, 32	CMSEL,S,_Y	CM,_Y,LINE

LSEL, , , , 39	CMDELE, _Y	!*
CM, _Y1, LINE	CMDELE, _Y1	CMSEL, S, _Y1
CMSEL, S, _Y	!*	LATT, 1, , 2, , 55, , 1
!*	CM, _Y, LINE	CMSEL, S, _Y
!*	LSEL, , , , 27	CMDELE, _Y
CMSEL, S, _Y1	CM, _Y1, LINE	CMDELE, _Y1
LATT, 1, , 2, , 53, , 1	CMSEL, S, _Y	!*
CMSEL, S, _Y	!*	CM, _Y, LINE
CMDELE, _Y	!*	LSEL, , , , 30
CMDELE, _Y1	CMSEL, S, _Y1	CM, _Y1, LINE
!*	LATT, 1, , 2, , 47, , 1	CMSEL, S, _Y
CM, _Y, LINE	CMSEL, S, _Y	!*
LSEL, , , , 40	CMDELE, _Y	!*
CM, _Y1, LINE	CMDELE, _Y1	CMSEL, S, _Y1
CMSEL, S, _Y	!*	LATT, 1, , 2, , 55, , 1
!*	CM, _Y, LINE	CMSEL, S, _Y
!*	LSEL, , , , 28	CMDELE, _Y
CMSEL, S, _Y1	CM, _Y1, LINE	CMDELE, _Y1
LATT, 1, , 2, , 53, , 1	CMSEL, S, _Y	!*
CMSEL, S, _Y	!*	CM, _Y, LINE
CMDELE, _Y	!*	LSEL, , , , 21
CMDELE, _Y1	CMSEL, S, _Y1	CM, _Y1, LINE
	LATT, 1, , 2, , 51, , 1	CMSEL, S, _Y
CM, _Y, LINE	CMSEL, S, _Y	!*
LSEL, , , , 26	CMDELE, _Y	!*
CM, _Y1, LINE	CMDELE, _Y1	CMSEL, S, _Y1
CMSEL, S, _Y	!*	LATT, 1, , 2, , 44, , 1
!*	CM, _Y, LINE	CMSEL, S, _Y
!*	LSEL, , , , 29	CMDELE, _Y
CMSEL, S, _Y1	CM, _Y1, LINE	CMDELE, _Y1
LATT, 1, , 2, , 43, , 1	CMSEL, S, _Y	!*
CMSEL, S, _Y	!*	CM, _Y, LINE

LSEL, , , , 22	CMDELE, _Y	lmesh,50
CM, _Y1,LINE	CMDELE, _Y1	
CMSEL,S, _Y	!*	lmesh,51
!*	CM, _Y,LINE	lmesh,52
!*	LSEL, , , , 25	lmesh,53
CMSEL,S, _Y1	CM, _Y1,LINE	lmesh,54
LATT,1, ,2, , 48, ,1	CMSEL,S, _Y	lmesh,55
CMSEL,S, _Y	!*	
CMDELE, _Y	!*	lmesh,56
CMDELE, _Y1	CMSEL,S, _Y1	lmesh,57
!*	LATT,1, ,2, , 56, ,1	lmesh,58
CM, _Y,LINE	CMSEL,S, _Y	lmesh,59
LSEL, , , , 23	CMDELE, _Y	lmesh,60
CM, _Y1,LINE	CMDELE, _Y1	
CMSEL,S, _Y	!*	lmesh,36
!*		lmesh,37
!*	AATT, 1, , 1, 0, 2	lmesh,38
CMSEL,S, _Y1	!6.-Mallado de la	lmesh,39
LATT,1, ,2, , 52, ,1	estructura	lmesh,40
CMSEL,S, _Y	aesize, all, 0.10	
CMDELE, _Y	amesh, all	lmesh,31
CMDELE, _Y1		lmesh,32
!*	lesize, all, 0.10	lmesh,33
CM, _Y,LINE	lmesh,41	lmesh,34
LSEL, , , , 24	lmesh,42	lmesh,35
CM, _Y1,LINE	lmesh,43	
CMSEL,S, _Y	lmesh,44	lmesh,26
!*	lmesh,45	lmesh,27
!*		lmesh,28
CMSEL,S, _Y1	lmesh,46	lmesh,29
LATT,1, ,2, , 56, ,1	lmesh,47	lmesh,30
CMSEL,S, _Y	lmesh,48	
	lmesh,49	

lmesh,21

lmesh,23

lmesh,25

lmesh,22

lmesh,24

8.4. Código para la placa ondulada

FINISH

/CLEAR,START

/PREP7

!1.-Elementos

ET,1,SHELL181

!2.-Propiedades de los materiales

MPTEMP,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,1,,2.1e11

MPDATA,PRXY,1,,0.3

!3.-Sección

sect,1,shell,,Placa

secdata, 0.003,1,0,3

secoffset,MID

seccontrol,0,0,0, 0, 1, 1, 1

!4.-Propiedades de la onda

n=100 !numero de ondas completas

L=5 !longitud total de la placa

s=L/(2*n) !longitud semionda

!5.-Creación de una onda completa

k,1,0,0,0

k,2,s/4,0.05*sin((s/4)*3.14/s),0

k,3,s/2,0.05*sin(3.14*(s/2)/s),0

k,4,3*s/4,0.05*sin(3.14*(3*s/4)/s) ,0

k,5,s,0.05*sin(s*3.14/s) ,0

k,6,5*s/4,0.05*sin((5*s/4)*3.14/s),0

k,7,3*s/2,0.05*sin(3.14*(3*s/2)/s),0

k,8,7*s/4,0.05*sin(3.14*(7*s/4)/s) ,0

k,9,2*s,0.05*sin(2*s*3.14/s) ,0

kgen,2,all,,,,,L

lstr,1,10

FLST,3,5,3

FITEM,3,1

FITEM,3,2

FITEM,3,3

FITEM,3,4

FITEM,3,5

BSPLIN, ,P51X

FLST,3,5,3

FITEM,3,5

FITEM,3,6
 FITEM,3,7
 FITEM,3,8
 FITEM,3,9
 BSPLIN, ,P51X
 FLST,3,5,3
 FITEM,3,10
 FITEM,3,11
 FITEM,3,12
 FITEM,3,13
 FITEM,3,14
 BSPLIN, ,P51X
 FLST,3,5,3
 FITEM,3,14
 FITEM,3,15
 FITEM,3,16

FITEM,3,17
 FITEM,3,18
 BSPLIN, ,P51X

 lstr,5,14
 lstr,9,18
 AL,1,4,6,2
 AL,6,5,7,3

!6.-Generación de la placa completa
 agen,n,all,,L/n
 !7.-Mallado de la estructura
 aeseize, all, 0.08
 amesh,all

1

9.
